



# Aspects combinatoires des pavages

Frédéric Chavanon

## ► To cite this version:

Frédéric Chavanon. Aspects combinatoires des pavages. Autre [cs.OH]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2004. Français. NNT: . tel-00008764

**HAL Id: tel-00008764**

**<https://theses.hal.science/tel-00008764>**

Submitted on 13 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 297

Numéro attribué par la bibliothèque : 04ENSL0 297

Ecole Normale Supérieure de Lyon

Thèse

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'ENS Lyon

spécialité : informatique

Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique fondamentale

présentée par

Frédéric CHAVANON

# Aspects combinatoires des pavages

soutenue publiquement le 10 décembre 2004 devant le jury suivant :

Alain BRETTO	Professeur, Université de Caen	Examineur
Nicolas DESTAINVILLE	Maître de Conférences, Université Toulouse 3	Examineur
Michel HABIB	Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur / Président
Jean-Christophe NOVELLI	CR CNRS, Université de Marne-la-Vallée	Rapporteur
Michel MORVAN	Professeur, ENS Lyon	Co-directeur
Eric REMILA	Maître de Conférences, IUT Roanne	Co-directeur



## Résumé

Dans le cadre de l'étude des ensembles de pavages, nous nous sommes concentrés sur le cas des pavages de zonotopes (figures d'un espace formées de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs donnés). Après avoir défini un graphe dual d'un pavage de zonotope planaire (par l'utilisation de la relation d'adjacence liant les tuiles), nous avons montré la relation biunivoque qui lie les deux classes d'objets. Nous avons alors étudié comment l'opération de flip (qui est un réarrangement local de tuiles) peut s'exprimer sur le dual, permettant par la suite de construire l'ensemble des pavages du zonotope associé.

Cette méthode ne pouvant que très difficilement s'adapter aux cas de dimensions supérieures (zonotopes non planaires), nous avons alors mis au point une méthode de décomposition permettant d'étudier un pavage en nous focalisant sur les propriétés de pavages plus petits. Ce type de méthode nous a permis de démontrer des résultats forts de reconstruction et de structure dans le cas de pavages de dimension 2. De plus, ceci nous a permis de démontrer des résultats de connexité dans certains cas particuliers de dimensions supérieures.

Le choix des pavages de zonotopes étend naturellement certains pavages étudiés classiquement (tels que les pavages de dominos sur une grille carrée ou de losanges sur une grille triangulaire). En effet, ils ne peuvent être définis sur une grille, et sont définis en toute dimension.

## Abstract

In the context of studying sets of tilings, we focus on the case of tilings of zonotopes (which are figures of a space defined by all linear combinations of a given set of vectors). We first define a graph which is a dual of tiling of a planar zonotope using the adjacency relation between tiles, then we prove the one-to-one correspondence between the two sets. We also study how the flip operation (which is a local reorganization of tiles) is defined on the dual, allowing to study the set of tilings of the corresponding zonotope.

This method can only hardly apply to higher dimensional cases (non planar zonotopes), we finalized a method by decomposition allowing to study a tiling by considering the properties of smaller tilings.

This kind of method was performed to prove strong results on the reconstruction and structure of tilings in the particular case of codimension 2. Moreover, this allowed to show a connectivity result on some cases of high dimension.

We chose zonotopal tilings for they extend quite naturally some classically studied tilings (such as domino tilings on the square lattice or lozenge tilings on the triangular lattice). Moreover, these tilings are not defined on a lattice, and they are defined for any dimension.



## Remerciements

La thèse est une période de transition dans une vie, avec ses joies, ses périodes de doute, et ses choix. J'aimerais préciser que j'ai eu le bonheur d'être accueilli à bras ouverts aussi bien au LIAFA, où j'ai effectué ma première année de thèse, qu'au LIP.

La recherche commence par un cadre d'accueil, et je tiens à remercier avant tout Daniel Krob, et Jean-Michel Muller de m'avoir successivement donné les moyens de travailler dans les laboratoires qu'ils dirigent.

Je me devais ensuite de remercier mes encadrants, Eric Rémila et Michel Morvan, pour les directions de recherche qu'ils m'ont proposé et permis de suivre. La rigueur et la disponibilité qui m'ont été proposées me sont un exemple.

Je tiens à remercier les membres de mon jury, et en particulier Nicolas Destainville qui se voit ici attribuer la lourde tâche d'intégrer une assemblée d'informaticiens.

Je tiens également à remercier toutes les personnes ayant partagé mes bureaux successifs. Je pense notamment à Matthieu, Clémence et Jean-Loup, pour leur humour décapant. Le soutien de Matthieu en particulier pendant ma première année de thèse m'a été d'une aide précieuse. Je finirai par Nazim et Emmanuelle pour leur soutien indéfectible pendant les périodes difficiles. S'y associent évidemment Gilles, Victor, Julio et Fabien.

J'ai eu par ailleurs le plaisir de travailler avec Laurent Vuillon, dont je ne saurais citer toutes les qualités. Les remarques et conseils de Dominique Rossin, Olivier Bodini et Nicolas Schabanel m'ont également apporté énormément.

Il est évident que manquent ici toutes les personnes que j'ai croisées pendant ces trois années. Les discussions de séminaires, conférences et écoles jeunes chercheurs ne peuvent être toutes référencées, mais sont le nerf de ce travail.

Pour finir, je remercie toutes les personnes de mon entourage, pour leur présence dans les moments difficiles, et la liberté qui m'a été laissée dans mes choix personnels. Je pense avant tout à mes parents, mais aussi à Carine, Philippe, Nath, Christine. Un grand merci à Seb pour toutes ses heures d'écoute patiente. Je suis conscient de ce que je lui ai infligé, et espère que ces discussions lui ont apporté autant de lumières qu'à moi.

Cette liste ne peut bien évidemment être close sans référence à Delph, sans laquelle rien n'aurait été possible.

Je citerai en conclusion notre source d'inspiration première, à savoir Adrien, Clémence, Alexandre, et Maelle.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Définitions</b>	<b>15</b>
2.1	Zonotopes, tuiles et pavages . . . . .	15
2.2	Familles, lignes et section de de Bruijn . . . . .	18
2.2.1	Fonctions de hauteur . . . . .	18
2.2.2	Sections de de Bruijn . . . . .	19
2.3	Suppressions . . . . .	21
2.4	Codage . . . . .	22
2.5	Transformations élémentaires . . . . .	24
2.5.1	Echange de vecteurs . . . . .	24
2.5.2	Multiplication par un réel positif . . . . .	25
2.5.3	Opposé d'un vecteur . . . . .	25
2.5.4	Equivalences . . . . .	27
2.6	Flips . . . . .	28
2.6.1	Pavages d'un $d + 1$ -zonotope unitaire . . . . .	28
2.6.2	Espaces de pavages . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Codage de pavages de zonotopes de dimension 2</b>	<b>33</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	33
3.2	Dualité . . . . .	39
3.2.1	Propriétés de la bordure . . . . .	41
3.2.2	Plus courts chemins . . . . .	43
3.2.3	Construction de la bordure . . . . .	45
3.2.4	Cas particulier : $t_2 \in L$ . . . . .	52
3.2.5	Algorithme de construction de la bordure . . . . .	54
3.3	Construction des lignes de de Bruijn . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Décomposition d'un pavage</b>	<b>63</b>
4.1	Suppressions . . . . .	63
4.2	Codage basé sur les suppressions . . . . .	66
4.3	Théorème de reconstruction . . . . .	67



<b>5</b>	<b>Structure de l'espace des pavages en codimension 1</b>	<b>71</b>
5.1	Définitions structurelles . . . . .	71
5.2	Fonctions de hauteur . . . . .	72
5.2.1	Réduction à la grille . . . . .	72
5.2.2	Le treillis des pavages . . . . .	76
5.2.3	Treillis et flips . . . . .	77
5.2.4	Applications . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Représentation en codimension 2</b>	<b>81</b>
6.1	Flip ensembliste . . . . .	81
6.2	Diagrammes de représentation . . . . .	82
6.2.1	Les $(d + 2)$ -zonotopes de base . . . . .	82
6.2.2	Diagrammes de pavages . . . . .	86
6.3	Propriétés des diagrammes . . . . .	88
6.4	Structure de l'ordre en codimension 2 . . . . .	91
6.4.1	Réduction de faisceau . . . . .	91
6.4.2	Graphe d'obstacles . . . . .	92
6.4.3	Fin de la preuve . . . . .	94
6.4.4	Conséquences . . . . .	95
6.5	Représentation en codimension 1 . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>99</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse a pour objet l'étude des pavages, et particulièrement leurs aspects combinatoires.

Les problèmes liés aux pavages sont présents en informatique depuis que Berger a montré l'indécidabilité du problème de pavage du plan par un ensemble donné de tuiles (voir [Ber66]). L'indécidabilité de certains problèmes de pavages (par exemple le pavage du plan par tuiles de Wang, qui sont des tuiles carrées avec contraintes de bords) est à présent un résultat classique (voir par exemple [AD95, Mar00]). Parallèlement, certains problèmes de pavages amènent d'intéressantes questions combinatoires à travers l'étude du nombre de solutions présentées.

La définition classique d'un problème de pavage est la donnée d'une partie d'espace à paver (appelée généralement support), et d'un jeu (ensemble) de tuiles, qui sont en général des polyèdres ou polygones. Un pavage est alors un recouvrement du support par des copies translatées des tuiles sans trou ni recouvrement entre tuiles. Certains problèmes comportent également des contraintes sur la façon dont peuvent être disposées les tuiles (ce type de problème est par exemple modélisé par les tuiles de Wang). Les questions qui se posent alors sont principalement de trois types :

- Etant donné un problème, a-t-il une solution ? Autrement dit, existe-t-il au moins un pavage du support donné par les tuiles choisies ? (Ceci est le problème de la pavabilité.)
- S'il existe une solution, combien en existe-t-il ? Est-il possible de structurer l'ensemble des solutions ?
- Est-il possible de générer automatiquement tous les pavages solution du problème ? Ou d'en générer un aléatoirement avec une distribution uniforme ? (Ceci est évidemment lié à la structuration de l'ensemble des solutions).

Dans la plupart des problèmes auxquels nous nous attachons ici, la première question a une réponse évidente, et de par la définition du problème

il existe toujours une façon simple de construire un premier pavage. Les questions auxquelles nous nous intéresserons auront pour objet l'ensemble des solutions d'un problème, et plus précisément les structurations possibles d'un tel ensemble.

Nous avons choisi dans ce cadre deux directions de recherche. Dans un premier temps nous approfondissons un cas de pavage d'une partie du plan. Nous étudions à cette fin les pavages d'une classe de polygones convexes par des parallélogrammes. Ceux-ci constituent le cas particulier de dimension 2 des pavages envisagés, les pavages de zonotopes, qui sont définis en toute dimension.

Les travaux de Conway et Lagarias [CL90] ainsi que Thurston [Thu90] ont apporté nombre de réponses dans le cas de pavages planaires pour lesquels le support, ainsi que les tuiles, peuvent être définis sur une grille. C'est le cas notamment des pavages par dominos sur la grille carrée, ainsi que des pavages par losanges sur la grille triangulaire. En particulier, l'algorithme de Thurston prend en entrée une région simplement connexe d'une grille (la région est connexe et son complémentaire également) ainsi qu'un ensemble de tuiles, et renvoie un pavage de cette région ou signale l'impossibilité de paver cette région. Dans le cas des dominos et des losanges, ce résultat a été utilisé par Desreux et Rémila dans [DR03, Des], où les auteurs présentent un algorithme efficace de génération de tous les pavages d'une région de la grille.

Cependant, les études ci-dessus sous-entendent toujours la présence d'une grille sous-jacente au pavage, qui permet de construire un groupe de pavage. Ainsi, les résultats de pavabilité, et de structure de l'ensemble des pavages connus dans ces cas sont assujettis à la présence d'une grille. Les pavages de zonotopes, et donc leur cas particulier planaire, présentent la particularité de ne pas être définis sur une grille (voir [BV00]). De plus, tous les pavages d'un zonotope donné sont constitués des mêmes tuiles, seules leurs positions relatives changent. Le problème est donc essentiellement combinatoire.

Dans une recherche pour isoler les propriétés combinatoires de ces pavages, nous montrons quelques propriétés du graphe sous-jacent (induit par une relation d'adjacence entre tuiles), et établissons une bijection entre graphes et pavages. Ceci présente l'intérêt de ramener certains problèmes classiques sur les pavages (comptage de pavages, tirages aléatoires) à des problèmes sur les graphes associés. De plus, ceci permet de s'affranchir des contraintes géométriques et de se concentrer sur l'aspect combinatoire, puisque la génération de pavages est ramenée ici à un ensemble de transformations du graphe.

Dans le cadre de pavages du plan, Kenyon [Ken93] envisage le problème du pavage d'un polygone du plan par des parallélogrammes, et montre d'une part les conditions sur le polygone nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel pavage, et d'autre part une génération de pavages

à partir de pavages existants par des "rotations". Il montre ainsi en particulier que dans le cas des zonotopes planaires, il y a connexité de l'ensemble des pavages par flips (réorganisation locale de tuiles 2 à 2 adjacentes). Parallèlement, Elnitsky [Eln97], en utilisant certains groupes de Coxeter, démontre la connexité par flips dans le cas de zonotopes planaires, et redémontre certains résultats de dénombrement. Cependant ces résultats sont à notre connaissance les seuls à porter sur des pavages planaires non représentables sur une grille.

La question du dénombrement de pavages d'une figure donnée est un sujet largement exploré depuis le fameux problème de dénombrement des partitions planaires étudié par MacMahon (voir figure 1.1). Celui-ci apporte une première réponse en 1899 dans [Mac16]. En effet les pavages de zonotopes peuvent être vus comme une généralisation des partitions d'entiers. Ceci est présenté en particulier par Destainville dans [Des97], et par Bailey dans [Bai99]. Les pavages de zonotopes peuvent être vus également comme des arrangements de pseudo-hyperplans (et pseudo-lignes dans le cas particulier de la dimension 2). Dans le cas planaire, certains travaux permettent de retrouver les résultats de dénombrement classiques (voir [Fel97, FW01, BS99, BD]).

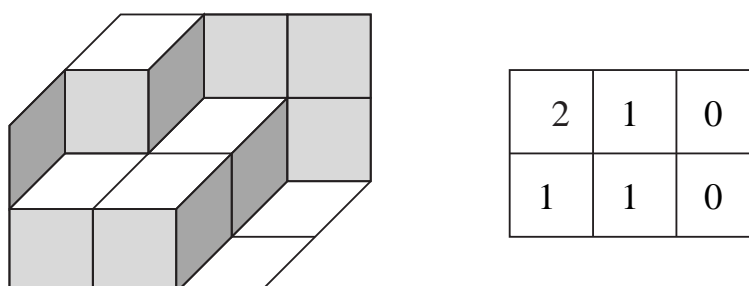


FIG. 1.1 – Pavage et la partition planaire correspondante.

Les méthodes de permanent et déterminant entrent dans cette catégorie. Les pavages d'hexagones sont alors vus comme des couplages sur la grille triangulaire (il existe une définition similaire pour les pavages par dominos sur la grille carrée). Ceci correspond en physique au problème du dimère (voir par exemple [Ken98, Pro99, Kup98]). Etant donné un graphe (dans le cas des pavages de losanges, c'est la relation d'adjacence des cellules de la grille triangulaire, voir figure 1.2), ces méthodes permettent d'explorer l'ensemble des couplages parfaits sur ce graphe (sélection d'un ensemble d'arêtes du graphe tel que tout sommet est adjacent à une arête exactement de l'ensemble). Chaque couplage parfait correspond à un pavage.

Les problèmes de dénombrement ont une importance particulière en

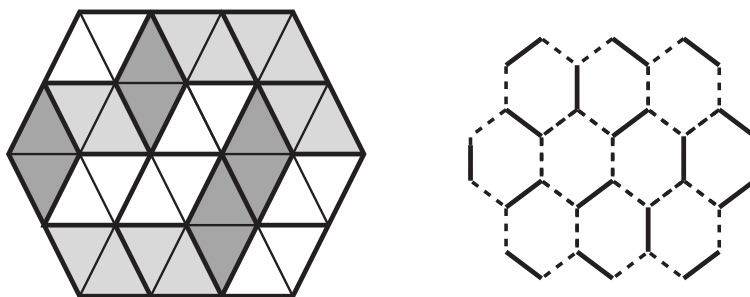


FIG. 1.2 – Pavage et le couplage correspondant.

physique statistique où les systèmes envisagés ont de nombreux états possibles. On cherche en général ici à observer un état "standard" du système, qui peut être construit par un tirage aléatoire dans l'ensemble des configurations possibles. Ceci a amené à de nombreuses études (voir par exemple [CLP98, Els84, Des01, Wil, Kup98, Kup94, LP86, Pro99]). Néanmoins, si Propp montre dans [Pro98] comment générer un pavage aléatoire avec une distribution uniforme dans le cas des hexagones et des dominos, ces résultats ne peuvent s'étendre à d'autres types de zonotopes à cause du manque de structuration de l'espace des pavages. Sur ce sujet, voir [JPS95]. En effet, son algorithme se base sur la structure de treillis distributif, dont la présence n'a été démontrée que dans certains cas (dits de codimension 1), voir [Sen95, Des02].

Une deuxième direction de recherche est axée sur une étude de cas non planaires. Nous envisageons ici les pavages de zonotopes sous un angle différent, par une définition récursive. Le but de cette manipulation est de mieux comprendre les structurations possibles de l'ensemble des pavages d'un zonotope donné, tout en s'affranchissant des contraintes de représentation. Nous montrons notamment certains résultats en dimensions supérieures à 2. En effet les pavages de zonotope servent en particulier aux physiciens à représenter des structures appelées quasicristaux. Ainsi, envisager ces pavages dans le plan correspond en fait à considérer des coupes de ces quasicristaux, et à étudier le comportement de telles coupes. On se doit donc d'étudier les interactions entre coupes, ce qui amène en particulier à étudier les pavages de dimension 3. De nombreuses questions sont ouvertes à ce sujet. En particulier, certaines opérations de réarrangement d'atomes dans la structure cristalline correspondent à un réarrangement local de tuiles dans le pavage associé. Cette opération permet en particulier de générer des pavages à partir d'un pavage déjà connu. Or, si on sait qu'en dimension 2 cette opération induit une connexité de l'ensemble des pavages d'un zonotope, la question est ouverte en dimension 3, ce qui im-

plique notamment l'impossibilité d'effectuer une génération aléatoire par processus markovien dans ce cas. Voir [BL03, WDMB98, LMN01].

Dans ce contexte, nous avons utilisé une nouvelle méthode, inspirée des techniques connues dans le monde des matroïdes (voir [Zie92, BVS<sup>+</sup>99, Zie95]). Le lien entre pavages de zonotopes et matroïdes orientés a été établi par Andreas Dress et Jochen Bohne, et une preuve du "théorème de Bohne-Dress" apparaît dans la thèse de J. Bohne, et est présentée dans [RGZ94]. Le résultat démontré ici présente les pavages de zonotopes comme une classe de matroïdes orientés particuliers.

Notre méthode par décomposition a permis en particulier de montrer la connexité par flips (réarrangement local de tuiles) de certains pavages de dimension 3, et semble pouvoir être étendu à d'autres cas.

Dans le chapitre 2, nous présentons de façon précise les problèmes de pavage que nous envisageons, ainsi que les outils fondamentaux et leurs propriétés. Nous limitons ainsi l'étude à un type de problème dont les limites géométriques et combinatoires sont bien posées, permettant d'isoler les cas particuliers.

Le chapitre suivant traite des codages de pavages de zonotopes de dimension 2 (polygones à nombre de côtés pair et à symétrie centrale). Nous définissons un graphe basé sur les relations d'adjacence entre tuiles, et montrons dans quelles conditions (avec un ajout minimal d'information) ces graphes peuvent être vus comme duals des pavages. Ceci est un premier codage de ces pavages à la fois indépendant de la dimension et de la codimension. Puis nous construisons une bijection liant de façon simple (en termes d'algorithmique) les deux classes d'objets. Ce chapitre a fait l'objet d'un article à paraître dans un numéro spécial de Theoretical Computer Science ([CLM<sup>+</sup>04]).

Un deuxième codage des pavages apparaît dans le chapitre 4, où nous abordons cette question sous un angle plus récursif, en décomposant un "grand" pavage en pavages plus petits et en étudiant les interactions entre ces derniers. Nous obtenons en particulier un résultat fort de reconstruction permettant de caractériser de façon simple les ensembles de petits pavages effectivement codant.

Nous effectuons dans le chapitre 5, en nous appuyant sur des résultats déjà connus, l'étude du cas particulier de la codimension 1, et montrons que l'ensemble des pavages d'un zonotope peut être structuré comme un treillis distributif.

Le second codage est exploité dans le chapitre 6 pour obtenir un diagramme de représentation dans le cas particulier de la codimension 2, ce qui amène à la structuration de l'ensemble des pavages dans ce cas précis, d'où découle la connexité par flips.

Les chapitres 5 et 6 ont fait l'objet d'un exposé à la "Latin-American

Conference on Combinatorics, Graphs and Applications" (LACGA'04) [CR04], ainsi que d'un article dans les actes de cette conférence. Par ailleurs, un article plus long est actuellement soumis à une revue internationale.

## Chapitre 2

# Définitions

Nous plaçons cette étude dans le cadre des pavages de zonotopes, et définissons dans un premier temps les objets de l'étude ainsi que les outils fondamentaux.

### 2.1 Zonotopes, tuiles et pavages

Cette partie présente les pavages de polyèdres de  $\mathbb{R}^d$  par des parallélépipèdes. Cependant, pour plus de clarté, la plupart des figures seront présentées dans le cas de la dimension 2.

Dans la suite, on notera  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $V = (v_1, v_2, \dots, v_D)$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  telle que  $D \geq d$ , et que toute sous-suite extraite  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_d})$  soit une base de  $\mathbb{R}^d$ . Soit également  $M = (m_1, m_2, \dots, m_D)$  une suite d'entiers positifs. Chaque  $m_i$  est associé au vecteur  $v_i$  et appelé la *multiplicité* de  $v_i$ . Le *zonotope* est par définition le couple  $(V, M)$ . Le *support*  $Z$  du zonotope  $(V, M)$  est la somme de Minkovski des vecteurs  $\{m_i v_i, i = 1, \dots, D\}$ , soit la région de  $\mathbb{R}^d$  définie par :

$$\left\{ \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq m_i, m_i \in M, v_i \in V \right\}$$

Autrement dit,  $Z$  est l'enveloppe convexe de l'ensemble  $S$  de points :

$$S = \left\{ v \in \mathbb{R}^d, v = \sum_{i=1}^D \lambda_i m_i v_i, \lambda_i \in \{0, 1\}, v_i \in V \right\}$$

Ainsi, on s'intéresse à l'objet géométrique  $Z$ . Cependant, dans ce qui suit, on codera  $Z$  sous la forme  $(V, M)$  qui, via les relations d'équivalence adéquates, contiendra l'information caractéristique des zonotopes auxquels on s'intéresse. De plus, dans le codage  $(V, M)$ , on ajoute l'information sur le rapport entre la longueur des côtés de  $Z$  et la longueur des vecteurs de



$V$ . Ceci correspondra au nombre de tuiles du pavage, et nous permettra de confondre des pavages identiques combinatoirement mais non géométriquement. Parallèlement, ceci permet de différencier des pavages d'un même support mais avec des tuiles de tailles différentes. Voir Figure 2.1.

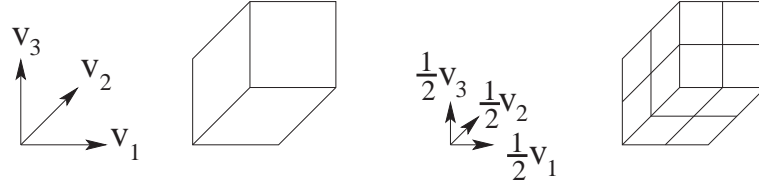


FIG. 2.1 – Gauche : un pavage du zonotope  $((v_1, v_2, v_3), (1, 1, 1))$ ; Droite : un pavage du zonotope  $((\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}v_3), (2, 2, 2))$ . Les supports sont identiques, mais pas les codages, ni les pavages.

Nous pouvons, à l'instar de Ziegler [Zie95], définir les faces d'un polyèdre, donc d'un zonotope en particulier.

**Définition 1** Soit  $P \subset \mathbb{R}^d$  un support de zonotope. Une inégalité linéaire de type  $cx \leq c_0$  est valide pour  $P$  si elle est satisfaite pour tous les points de  $P$ . Une face de  $P$  est tout ensemble de la forme  $F = P \cup \{x \in \mathbb{R}^d | cx = c_0\}$  où  $cx \leq c_0$  est une inégalité valide pour  $P$ . La dimension d'une face est la dimension du plus petit espace affine la contenant.

Ainsi, les sommets du polyèdre sont les faces de dimension nulle, les arêtes sont les faces de dimension 1, et on appellera classiquement *facettes* les faces de dimension  $d - 1$ .

Le paramètre  $c = D - d$  est appelé la *codimension* du zonotope, et  $s = \sum_{i=1}^D m_i$  est sa *taille*. On dira que  $Z$  est un  $s$ -zonotope. Si  $s = D$ , donc si toutes les multiplicités sont égales à 1, on dit que le zonotope est *unitaire*. La figure 2.2 donne deux exemples de zonotopes de taille 4, l'un en dimension 2, l'autre en dimension 3. Tous deux sont unitaires.

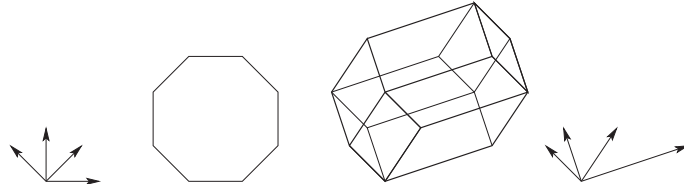


FIG. 2.2 – Zonotopes unitaires de dimension respectives 2 et 3 construits sur 4 vecteurs

Soit donc  $Z = (V, M)$  un zonotope. L'ensemble  $V$  des vecteurs le définissant est appelé le *type* de  $Z$ . On définit une *proto-tuile* comme un zono-

tope unitaire construit sur une sous-suite  $V'$  de  $d$  vecteurs distincts issus de  $V$  (voir figure 2.3). De cette façon, une suite  $V$  de  $D$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  permet de définir  $\binom{D}{d}$  proto-tuiles différentes. Une *tuile*  $t$  est une prototuille translatée ; en d'autres termes, une tuile est définie par une paire  $(p, w)$  où  $p$  est une prototuille et  $w$  un vecteur déplacement. En pratique, pour les pavages que l'on va étudier, un vecteur déplacement sera une combinaison linéaire des vecteurs de  $V$ ,  $w = \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq m_i$  telle que tous les  $\lambda_i$  sont entiers. On représentera un tel déplacement par le vecteur  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)$ . Le type d'une tuile est simplement le type de la proto-tuille  $p$  la définissant.

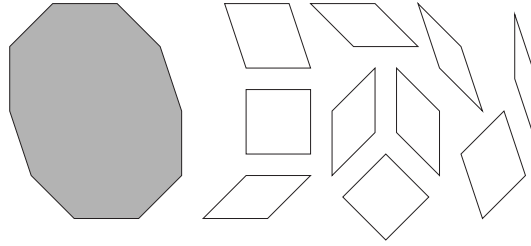


FIG. 2.3 – Un zonotope unitaire de dimension 2 et de taille 5. Sa codimension est 3, et les 10 proto-tuiles associées sont représentées à droite.

Ayant défini un zonotope et les tuiles qui lui sont associées, on peut à présent définir un pavage. Soit  $Z = (V, M)$  un zonotope ; un pavage  $T$  de  $Z$  est un ensemble de tuiles construit sur les vecteurs de  $V$  tel que l'union des tuiles couvre exactement  $Z$  (il n'y a pas de trou), et l'intersection entre deux tuiles est une face (il n'y a pas de recouvrement). L'intersection entre deux tuiles peut donc être soit vide, soit une face de dimension inférieure à  $d$ . Les sommets des tuiles sont les *sommets* du pavage, et les arêtes des tuiles sont les *arêtes* du pavage. Deux tuiles sont *adjacentes* si elles partagent une facette. Dans l'exemple de la figure 2.4,  $t_1$  et  $t_2$  sont adjacentes, la facette qu'elles partagent a pour type  $\{v_4\}$  et son vecteur déplacement est  $v_1$ . Les tuiles  $t_7$  et  $t_4$  ont le point  $2.v_1 + v_2 + v_4$  en commun, et ne sont donc pas adjacentes.

**Remarque :** Pour tout pavage de dimension  $d$  avec  $V = \{v_1, \dots, v_D\}$  et  $M = \{m_1, \dots, m_D\}$ , le nombre de tuiles du type  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  est de  $m_1 m_2 \dots m_d$ , donc le nombre total de tuiles du pavage vaut :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq D} m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_d}$$

On dira de plus que  $Z$  est le *support* du pavage  $T$ . Voir figure 2.5.

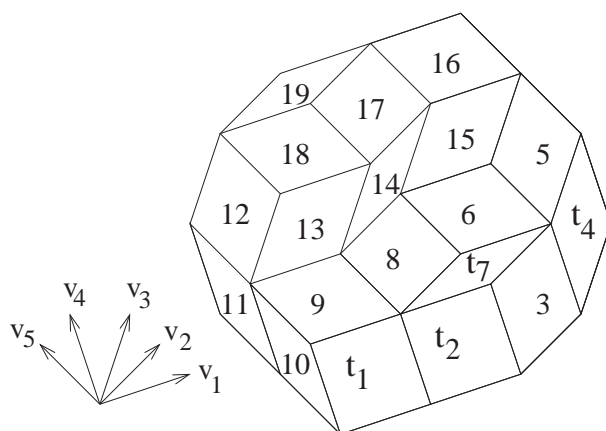


FIG. 2.4 – un pavage d'un zonotope de dimension 2, associé à  $M = (2, 1, 1, 1, 2)$ . C'est un décagone dont les côtés ont longueur  $2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2$ .

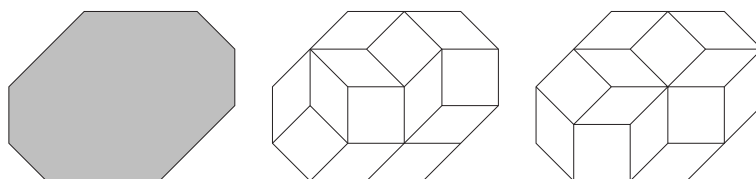


FIG. 2.5 – Un zonotope associé à 4 vecteurs de multiplicités  $2, 2, 1, 1$ , support, et deux de ses pavages.

La section suivante introduit les fonctions de hauteur sur les pavages de zonotopes, qui nous permettront de donner une expression unique du vecteur déplacement associé à une tuile en fonction des vecteurs de  $V$ . Ceci nous permettra d'obtenir un codage unique pour chaque tuile (le type de la tuile est bien défini), et par conséquent un codage des pavages.

## 2.2 Familles, lignes et section de de Bruijn

### 2.2.1 Fonctions de hauteur

Nous définissons ici les premiers outils permettant l'étude de ces pavages. Introduits par N.G. de Bruijn dans [dB81], ils permettent notamment de positionner les tuiles les unes par rapport aux autres dans un pavage donné.

**Définition 2 (relèvement, fonction de hauteur)** Soit  $Z = (V, M)$  un zonotope de  $\mathbb{R}^d$  défini avec  $V = (v_1, \dots, v_D)$ . Un relèvement de  $V$  est une suite

$U = (u_1, \dots, u_D)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^{d+1}$  telle que pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq D$ , on ait  $u_j = (v_j, \alpha_j)$ .

Soit  $T$  un pavage de  $Z$ . Un relèvement associé à  $T$  est une fonction  $f_{T,U}$  qui à tout sommet de  $T$  associe un vecteur de  $\mathbb{R}^{d+1}$  et satisfait à la propriété suivante : pour toute paire  $(x, x')$  de sommets telle que  $x' = x + v_i$  et  $[x, x']$  est une arête de  $T$ , alors  $f_{T,U}(x') = f_{T,U}(x) + u_i$ . Voir figure 2.6.

La fonction de hauteur  $h_{T,U}$  associée au relèvement de pavage  $f_{T,U}$  est la composante de  $f_{T,U}$  suivant  $e_{d+1}$ .

Nous présentons quelques propriétés classiques des fonctions de hauteur, sans démonstration. Le lecteur intéressé peut se reporter à [Rém03, CL90, BF02].

Nous appelons *légal* un chemin entre deux points d'un pavage passant par des arêtes du pavage.

**Proposition 2.2.1 (J.H.Conway)** Soit  $T$  un pavage d'un polygone  $P$ . La différence de hauteur de tout cycle légal de  $T$  est nulle.

**Corollaire 2.2.2** Soit  $T$  un pavage d'un polygone  $P$ . Deux chemins de  $P$  légaux pour  $T$  ayant mêmes extrémités ont même différence de hauteur.

**Remarque :** Tout chemin sur le contour d'un polygone étant légal pour tout pavage, la hauteur d'un point de contour est indépendante du pavage.

Remarquons que si  $h_{T,U}$  est une fonction de hauteur, alors toute fonction de hauteur est de type  $h_{T,U} + e_{d_{k+1}}$ . Parmi ces fonctions, nous appellerons *hauteur canonique* la fonction de hauteur dont la valeur est positive en tout point du pavage et vaut exactement 0 en au moins un point du pavage. Dans ce qui suit, sauf contre-indication, nous supposons que les fonctions de hauteur utilisées sont canoniques.

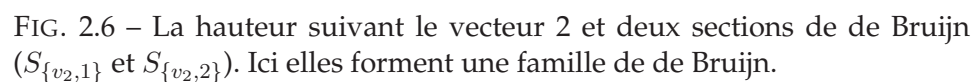
Les deux fonctions de hauteur les plus utilisées par la suite sont :

- la fonction de hauteur principale définie par  $\forall v_i \in V, u_i = (v_i, 1)$
- la fonction de hauteur suivant  $k$  définie par :  $u_k = (v_k, 1)$  pour  $k$  fixé, et  $\forall i \neq k, u_i = (v_i, 0)$ , et notée  $h_i$

La hauteur suivant  $k$  a même valeur en tout sommet d'une tuile dont le type ne contient pas  $v_k$ , et diffère de 1 aux extrémités d'une arête de type  $v_k$ . Ainsi, la hauteur principale diffère de 1 aux extrémités de toutes les arêtes du pavage (voir Figure 2.7). En effet, la hauteur principale est une composition des hauteurs suivant tous les vecteurs définissant un zonotope.

## 2.2.2 Sections de de Bruijn

Nous définissons à présent, en nous appuyant sur les fonctions de hauteur, les sections et familles de de Bruijn, concept fondamental dans toute l'étude qui suit (voir [dB81] pour plus de détails).



**Définition 3 (sections de de Bruijn, familles de de Bruijn)** Soit  $T$  un pavage d'un zonotope  $Z = (V, M)$ , et  $h_i$  sa hauteur suivant  $v_i$  associée. La famille de de Bruijn associée au vecteur  $v_i$  est l'ensemble des tuiles dont le type contient  $v_i$ . De plus, la  $j$ -ème section de de Bruijn de cette famille est l'ensemble des tuiles dont la hauteur suivant  $h_i$  vaut  $j - 1$  sur une face de dimension  $d - 1$  (c'est-à-dire sur tous les sommets d'une telle face), et  $j$  sur la face opposée. On notera une telle section  $S_{\{v_i, j\}}$ . Voir figure 2.6.

Remarquons dès à présent que la suppression d’une section de de Bruijn  $S_{\{v_i, j\}}$  déconnecte le pavage en deux parties notées par la suite  $T_{\{v_i, j\}}^+$  et  $T_{\{v_i, j\}}^-$ . La première est composée des tuiles ayant une hauteur suivant  $v_i$  valant au moins  $j$  en tout sommet, et la seconde correspond aux tuiles dont

la hauteur  $h_i$  est positive et vaut au plus  $j - 1$  en tout sommet.  $S$  étant l'ensemble des tuiles dont la hauteur suivant  $v_i$  vaut  $j - 1$  sur une face et  $j$  sur la face opposé, il est clair que  $T = T^+ \cup T^- \cup S$ . De plus, par définition de  $S, T^+$  et  $T^-$ , ces trois ensembles sont disjoints. Il en résulte que  $T$  est l'union disjointe de  $S, T^+$  et  $T^-$ .

Pour  $j < j'$  on aura  $T_{\{v_i, j\}}^- \subseteq T_{\{v_i, j'\}}^-$  ainsi que  $T_{\{v_i, j\}}^+ \supseteq T_{\{v_i, j'\}}^+$ .

Les sections de de Bruijn sont ainsi l'outil fondamental qui permet les raisonnements par récurrence. En effet, considérant l'opération inverse de la suppression, on peut construire un pavage en commençant avec une tuile et en ajoutant successivement des sections de de Bruijn. Deux cas sont possibles :

- soit il existe déjà une section de de Bruijn de même type (même ensemble de vecteurs la caractérisant), et on incrémente la multiplicité de la famille correspondante
- soit il n'existe aucune section du même type, et on incrémente la co-dimension

Nous dirons que deux sections de de Bruijn  $S_{\{v_i, j\}}$  et  $S_{\{v_k, l\}}$  sont *parallèles* si  $v_i = v_k$ . L'intersection de  $d$  sections de de Bruijn d'un pavage  $T$  qui deux à deux sont non parallèles est une tuile de  $T$ . De même, l'intersection de  $d - 1$  sections non parallèles deux à deux est un ensemble de tuiles qui peuvent être totalement ordonnées de sorte que deux tuiles successives soient adjacentes. Un tel ensemble est appelé une *ligne de de Bruijn*. Pour  $d = 2$ , on remarque aisément que les lignes de de Bruijn sont exactement des sections de de Bruijn. Cependant, pour  $d \neq 2$ , les lignes de de Bruijn diffèrent des sections de de Bruijn.

On peut remarquer par ailleurs que dans un pavage quelconque toute paire de sections de de Bruijn non parallèles se coupent. Par contre, ceci n'est pas vrai pour les lignes de de Bruijn dès lors que  $d \geq 3$ .

**Remarque :** Pour un zonotope donné, tous les pavages sont constitués des mêmes tuiles. Seules les positions des tuiles dans le pavage changent. On peut d'ores et déjà noter de manière informelle que les lignes de de Bruijn permettent de connaître les positions relatives des tuiles, donc le pavage.

## 2.3 Suppressions

Ayant défini les sections de de Bruijn, nous présentons l'opération de *suppression*, qui sera étudiée plus extensivement au chapitre 3.

Soit  $T$  un pavage d'un zonotope  $(V, M)$ , et  $S_{\{v_i, j\}}$  une section de de Bruijn de  $T$ . On peut alors supprimer les tuiles de  $S_{\{v_i, j\}}$  et translater les tuiles de  $T_{\{v_i, j\}}^+$  par le vecteur  $-v_i$ . Pour  $D > d$ , la configuration obtenue est

un pavage de  $Z' = (V, M')$  où  $M'$  est défini par  $m'_i = m_i - 1$  et  $\forall k \neq i, m'_k = m_k$  (dans le cas où  $m_i = 1$ ,  $Z' = (V', M')$ , où  $V'$  et  $M'$  sont obtenus en retirant la  $i$ -ème composante respectivement de  $V$  et  $M$ ). Cette opération est appelée *suppression*.

La suppression définit, à partir d'un pavage de taille  $s$ , un pavage de taille  $s - 1$  (voir figure 2.8). Par applications successives ceci permet d'obtenir des pavages de plus en plus petits, jusqu'aux pavages de taille  $d + 1$ , plus petits pavages non triviaux (non réduits à une tuile).

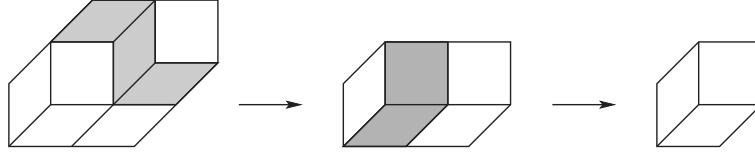


FIG. 2.8 – Pavage et suppressions successives. En grisé la section à supprimer.

L'opération réciproque permet de construire récursivement les pavages, à partir d'une tuile posée à l'origine (son vecteur de translation est  $(0, \dots, 0)$ ), puis en ajoutant les sections de de Bruijn une par une. Voir Figure 2.9.

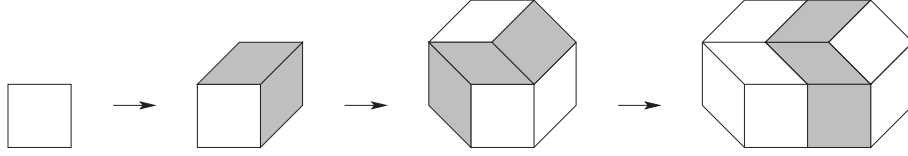


FIG. 2.9 – Construction d'un pavage par ajouts successifs de lignes de de Bruijn. En grisé la ligne ajoutée.

## 2.4 Codage

Ayant introduit les fonctions de hauteur et sections de de Bruijn, nous pouvons présenter un premier codage des pavages de zonotopes induit par ces sections.

Un pavage peut être codé sous forme d'un ensemble de tuiles, chaque tuile  $t$  étant définie par un couple  $t = (p, w)$  où  $p$  est la prototuile définissant la forme de  $t$  et  $w$  est un vecteur déplacement définissant sa position.

**Proposition 2.4.1** *Etant donné un point  $p$  d'un pavage  $T$ , la position de  $p$  est  $p = \sum_{i=1}^D h_{T,i}(p)v_i$ .*

**Preuve :** Nous montrons cette proposition par récurrence sur la taille du zonotope support du pavage.

Pour un pavage trivial, c'est-à-dire une tuile, le résultat est évident. Il suffit de vérifier que tout sommet de la tuile est atteint en suivant les arêtes de la tuile, ce qui correspond à des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\{0, 1\}$  des vecteurs définissant la tuile.

Supposons le résultat vrai pour un zonotope  $Z$  de taille  $s$ , et considérons le zonotope  $Z'$  pavé de taille  $s+1$  construit à partir de  $Z$  en lui ajoutant une section de de Bruijn  $S_{\{v_i, j\}}$ . Ceci correspond à traduire la partie  $T_{\{v_i, j\}}^+$  de  $v_i$ , puis à insérer les nouvelles tuiles dans l'intervalle créé. Soit  $p$  un point de  $T'$ , le pavage obtenu de  $Z'$ . Deux cas sont possibles :

- si  $p \in T_{\{v_i, j\}}^-$ , alors  $p$  est tel que  $h_{T, i}(p) = h_{T', i}(p) \quad \forall i$ . Comme sa position dans  $T$  est la même que sa position dans  $T'$ , le résultat est obtenu.
- si  $p \in T_{\{v_i, j\}}^+$ , alors  $p$  est l'image d'un point  $p_0$  de  $T$  par la translation de vecteur  $v_i$ . De plus,  $h_{T', i}(p) = h_{T, i}(p_0) + 1$  puisqu'il y a une section de de Bruijn supplémentaire entre le point de hauteur principale 0 et  $p$ . Le résultat étant par hypothèse vrai pour  $p_0 \in T$ , il est vrai pour  $p$ .

Voir Figure 2.10 pour un exemple.  $\square$

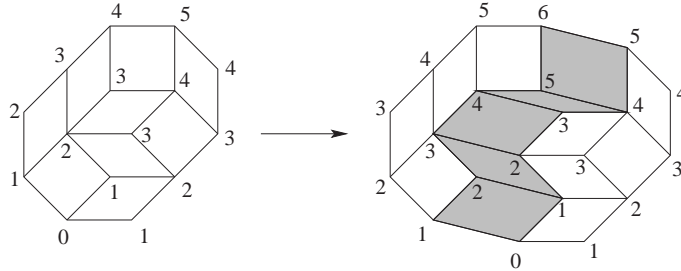


FIG. 2.10 – Les hauteurs avant (gauche) et après (droite) ajout d'une section de de Bruijn.

Nous appellerons *origine* d'une tuile  $t$  le point de coordonnées  $(0, \dots, 0)$  dans  $(v_1, \dots, v_D)$ , cette suite étant le type de  $t$ . Ainsi, ce point correspond exactement au vecteur déplacement de  $t$ .

Nous introduisons le codage suivant :  $T$  est représenté par l'ensemble de ses tuiles. Chaque tuile de  $T$  est un couple  $(p, w)$  où  $p$  est le type de la tuile, et  $w$  son vecteur de déplacement. Une méthode permettant de choisir les vecteurs de représentation sera explicitée par la suite.

Considérons la figure 2.4. Le support de  $T$  est défini par 5 vecteurs. Ici,  $t_6$  a pour type  $\{v_1, v_5\}$ , noté 15, et son vecteur déplacement est  $v_1 + v_2 + v_4$ , noté  $(1, 1, 0, 1, 0)$ .  $T$  est décrit par :



$$T = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = (14, (0, 0, 0, 0, 0)), t_2 = (14, (1, 0, 0, 0, 0)), t_3 = (24, (2, 0, 0, 0, 0)), \\ t_4 = (34, (2, 1, 0, 0, 0)), t_5 = (35, (2, 1, 0, 1, 0)), t_6 = (15, (1, 1, 0, 1, 0)), \\ t_7 = (12, (1, 0, 0, 1, 0)), t_8 = (25, (1, 0, 0, 1, 0)), t_9 = (15, (0, 0, 0, 1, 0)), \\ t_{10} = (45, (0, 0, 0, 0, 0)), t_{11} = (45, (0, 0, 0, 0, 1)), t_{12} = (35, (0, 0, 0, 1, 1)), \\ t_{13} = (13, (0, 0, 0, 1, 1)), t_{14} = (23, (1, 0, 0, 1, 1)), t_{15} = (13, (1, 1, 0, 1, 1)), \\ t_{16} = (15, (1, 1, 1, 1, 1)), t_{17} = (25, (1, 0, 1, 1, 1)), t_{18} = (15, (0, 0, 1, 1, 1)), \\ t_{19} = (12, (0, 0, 1, 1, 2)) \end{array} \right\}$$

## 2.5 Transformations élémentaires

Ayant défini un premier codage des pavages, nous présentons certaines transformations sur les zonotopes, permettant de se ramener à un cas *canonique*. Ceci nous amènera par la suite à avoir des conventions sur les représentations des pavages de dimension 2 et à simplifier le cas de codimension 1.

Chacune des transformations considérées est une transformation bijective sur l'ensemble des zonotopes qui à un zonotope  $Z$  associe un zonotope  $Z' = \Phi(Z)$ . A partir de chaque transformation  $\Phi$ , on définit une bijection  $\Phi_{Z,\text{pavage}}$  qui à tout pavage  $T$  de  $Z$  associe un pavage  $T' = \Phi_{Z,\text{pavage}}(T)$  du zonotope  $Z' = \Phi(Z)$ . De plus on obtient une bijection  $\Phi_{T,\text{tuile}}$  qui à toute tuile  $t \in T$  associe une tuile  $t' = \Phi_{T,\text{tuile}}(t) \in T' = \Phi_{Z,\text{pavage}}(T)$ .

Ces applications sont précisées ci-dessous dans chaque cas, ainsi que leurs propriétés. On fixe un zonotope  $Z = (V, M)$ , avec  $V = (v_1, v_2, \dots, v_D)$  et  $M = (m_1, m_2, \dots, m_D)$ .

### 2.5.1 Echange de vecteurs

On définit l'application  $\Phi_{j,k}$  qui à  $Z$  associe le zonotope  $Z' = \Phi_{j,k}(Z)$  tel que  $v'_i = v_i \ \forall i \neq j, k$  et  $v'_k = v_j, v'_j = v_k$ . De même on a  $m'_i = m_i \ \forall i \neq j, k$  et  $m'_k = m_j, m'_j = m_k$ . Cette première transformation correspond informellement à échanger les vecteurs  $v_j$  et  $v_k$ .

Le support du zonotope est inchangé, on a juste renuméroté les vecteurs le définissant.

Etant donné un pavage  $T$  de  $Z$ , on définit l'application  $\Phi_{Z,\text{pavage}}$  telle que  $\Phi_{Z,\text{pavage}}(T) = T'$ , où  $T'$  est le pavage de  $Z'$  identique au pavage  $T$  de  $Z$ . Alors  $\Phi_{Z,\text{pavage}}$  est l'application identité, de même que l'application  $\Phi_{T,\text{tuile}}$ .

Notons que le codage de  $T'$  est différent de celui de  $T$ . En effet, étant donnée une tuile  $t$ , si le type de  $t$  ne contient ni  $v_j$  ni  $v_k$ , le codage de  $t$  est inchangé, mais si le type de  $t$  contient  $v_k$  (respectivement  $v_j$ ), ce dernier est remplacé par  $v_j$  (respectivement  $v_k$ ). De même, les composantes du vecteur

déplacement suivant  $v_k$  et  $v_j$  sont échangées dans le codage de  $t$ .

Reprenant l'exemple de la Figure 2.4, nous échangeons les vecteurs  $v_2$  et  $v_3$  (respectivement de multiplicités 2 et 1). Le même pavage, avec les vecteurs 2 et 3 échangés, est alors codé par :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = (14, (0, 0, 0, 0, 0)), t_2 = (14, (1, 0, 0, 0, 0)), t_3 = (34, (2, 0, 0, 0, 0)), \\ t_4 = (24, (2, 0, 1, 0, 0)), t_5 = (25, (2, 0, 1, 1, 0)), t_6 = (15, (1, 0, 1, 1, 0)), \\ t_7 = (13, (1, 0, 0, 1, 0)), t_8 = (35, (1, 0, 0, 1, 0)), t_9 = (15, (0, 0, 0, 1, 0)), \\ t_{10} = (45, (0, 0, 0, 0, 0)), t_{11} = (45, (0, 0, 0, 0, 1)), t_{12} = (25, (0, 0, 0, 1, 1)), \\ t_{13} = (12, (0, 0, 0, 1, 1)), t_{14} = (23, (1, 0, 0, 1, 1)), t_{15} = (12, (1, 0, 1, 1, 1)), \\ t_{16} = (15, (1, 1, 1, 1, 1)), t_{17} = (35, (1, 1, 0, 1, 1)), t_{18} = (15, (0, 1, 0, 1, 1)), \\ t_{19} = (13, (0, 1, 0, 1, 2)) \end{array} \right\}$$

### 2.5.2 Multiplication par un réel positif

On définit  $\Phi_{j,\lambda}$  l'application qui à  $Z$  associe le zonotope  $Z' = (V', M')$  tel que  $v'_i = v_i \forall i \neq j$  et  $v'_j = \lambda v_j$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , et donc informellement multiplie le vecteur  $v_j$  par le coefficient  $\lambda$ . On a par ailleurs  $M = M'$ .  $\Phi_{j,\lambda}$  modifie le support du zonotope en dilatant d'un facteur  $\lambda$  les faces dont le type contient  $v_j$ .

Soit  $T$  un pavage de  $Z$ , et soit  $\Phi_{Z,\text{pavage}}$  l'application qui à  $T$  associe le pavage  $T'$  de  $Z'$  de même codage que  $T$ . Les codages de  $T$  et  $T'$  sont identiques, mais pas les pavages, puisque chaque tuile dont le type contient  $v_j$  a été dilatée du coefficient  $\lambda$ . L'application  $\Phi_{j,\lambda}$  n'est pas l'identité, mais le codage de  $T'$  est le même que celui de  $T$ .

Pour une tuile  $t \in T$ ,  $\Phi_{T,\text{tuile}}(t)$  est la tuile de  $T'$  ayant même codage. Voir figure 2.13 pour un exemple.

### 2.5.3 Opposé d'un vecteur

Soit  $Z = (V, M)$  un zonotope. On définit l'application  $\Phi_{j,-}$  qui associe à  $Z$  le zonotope  $Z' = (V', M')$  tel que  $v'_i = v_i \forall i \neq j$  et  $v'_j = -v_j$ . De plus,  $m'_i = m_i \forall i$ . Informellement,  $\Phi_{j,-}$  remplace le vecteur  $v_j$  par son opposé.

$\Phi_{j,-}$  translate le support du zonotope de  $-m_j v_j$ . Formellement  $\text{sup}(\Phi_{j,-}(Z)) = \text{sup}(Z) - m_j v_j$ .

Le support du zonotope étant translaté de  $-m_j v_j$ , à tout pavage  $T$  de  $Z$  on fait correspondre le pavage  $T' = \Phi_{Z,\text{pavage}}(T)$  qui est le translaté par  $-m_j v_j$  de  $T$ . De même, étant donnée une tuile  $t \in T$ ,  $\Phi_{T,\text{tuile}}(t)$  est la tuile  $t' \in \Phi_{Z,\text{pavage}}(T)$  telle que  $t' = t - m_j v_j$ .

Pour le codage, le type de  $t'$  est celui de  $t$ . Si nous désignons par  $w_{t'}$  (respectivement  $w_t$ ) la  $j$ -ième coordonnée de  $t'$  (respectivement  $t$ ), on a :

- si  $v_j$  apparaît dans le type de  $t$ , alors  $w_{t'} = w_t - m_j v_j + 1$ ,

- sinon  $w_{t'} = w_t - m_j v_j$ .

Voir Figure 2.12.

Sur l'exemple de la Figure 2.11 :

- le premier cas correspond à la tuile  $t_5$  de  $T$ . Son type contenant  $v_2$ , qui devient  $v'_2$  dans  $T'$ , l'origine est déplacée de  $v_2$ .
- le deuxième cas correspond à la tuile  $t_1$  de  $T$ , dont l'origine est en bas à gauche dans les deux cas.

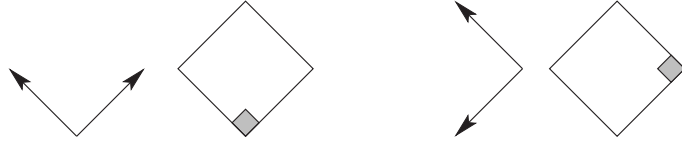


FIG. 2.11 – Une tuile avant et après passage à l'opposé d'un des vecteurs définissant son type. Notons le déplacement de l'origine

On obtient au final la figure 2.12, le pavage de droite étant translaté de  $-2v_2$ .

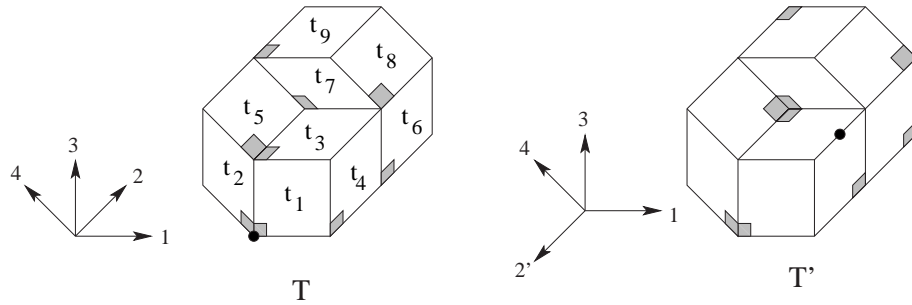


FIG. 2.12 – Deux pavages, avant et après avoir remplacé  $v_2$  par  $-v_2$ . Les origines des tuiles sont représentées en grisé. Le point de coordonnée  $(0, 0, 0, 0)$  est représenté par un point noir.

Les deux pavages  $T$  et  $T' = \Phi_T(T)$  sont codés par :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = (13, (0, 0, 0, 0)), t_2 = (34, (0, 0, 0, 0)), t_3 = (12, (0, 0, 1, 0)), \\ t_4 = (23, (1, 0, 0, 0)), t_5 = (24, (0, 0, 1, 0)), t_6 = (23, (1, 1, 0, 0)), \\ t_7 = (14, (0, 1, 1, 0)), t_8 = (24, (1, 1, 1, 0)), t_9 = (12, (0, 1, 1, 1)) \end{array} \right\}$$

$$T' = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = (13, (0, -2, 0, 0)), t_2 = (34, (0, -2, 0, 0)), t_3 = (12, (0, -1, 1, 0)), \\ t_4 = (23, (1, -1, 0, 0)), t_5 = (24, (0, -1, 1, 0)), t_6 = (23, (1, 0, 0, 0)), \\ t_7 = (14, (0, -1, 1, 0)), t_8 = (24, (1, 0, 1, 0)), t_9 = (12, (0, 0, 1, 1)) \end{array} \right\}$$

conformément aux remarques précédentes.

### 2.5.4 Equivalences

Etant données les trois transformations précédentes, nous dirons que deux zonotopes sont *équivalents* si on peut passer de l'un à l'autre par une suite de telles transformations.

De même, la notion d'équivalence ci-dessus définit naturellement une relation d'équivalence entre pavages de zonotopes équivalents, puis entre tuiles de pavages équivalents (voir Figure 2.13).

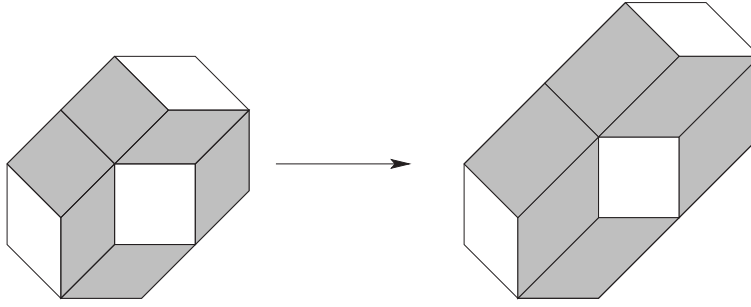


FIG. 2.13 – Deux pavages équivalents, notons que seules les transformations de type  $\Phi_{j,\lambda}$  apparaissent.

Les ensembles de pavages de deux zonotopes équivalents peuvent ainsi être mis en bijection. Ceci permet de choisir une convention sur l'ordre, la longueur et le sens des vecteurs de l'ensemble de vecteurs d'un zonotope.

**Proposition 2.5.1** *Soient deux pavages  $T$  et  $T'$  équivalents,  $t_1$  et  $t_2$  deux tuiles adjacentes de  $T$ ,  $t'_1$  et  $t'_2$  leur tuiles correspondantes dans  $T'$ . Alors  $t'_1$  et  $t'_2$  sont adjacentes.*

**Preuve :** Toute relation d'équivalence entre pavages étant une composée des trois transformations décrites ci-dessus, il suffit de vérifier que l'adjacence est conservée pour chacune des transformations.

L'échange de deux vecteurs conserve la géométrie du pavage. Ainsi, les images de deux tuiles adjacentes sont adjacentes.

La multiplication d'un vecteur par un réel positif conserve évidemment les adjacences, puisqu'elle laisse le codage inchangé.

Le passage à l'opposé d'un vecteur  $v_i$  translate toutes les tuiles de  $-m_i v_i$ . Ainsi deux tuiles adjacentes sont translatées de  $-m_i v_i$ , et leur images par la transformation sont adjacentes.  $\square$

Dans le cas particulier de la dimension 2, les vecteurs (de  $\mathbb{R}^2$ ) peuvent être naturellement totalement ordonnés. Chaque vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^2$  peut être représenté par  $v = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0; 2\pi[$  étant l'*argument* de  $v$ . Etant donnés deux

vecteurs  $v = re^{i\theta}$  et  $v' = r'e^{i\theta'}$ , nous dirons que  $v < v'$  dans l'ordre naturel si  $\theta < \theta'$ .

Les remarques précédentes permettent de se ramener, en dimension 2, au cas *canonique* suivant :

- $V = (v_1, v_2, \dots, v_D)$  est tel que  $v_i < v_{i+1}$
- l'argument de  $v_D$  est inférieur à  $\pi$  (c'est-à-dire que le pavage est défini dans un demi-plan)

Comme conséquence directe, le point de coordonnée  $(0, \dots, 0)$  est un sommet du zonotope.

Par la suite, toutes les représentations de pavages de dimension 2 seront canoniques.

Ayant défini ces notions d'équivalence, nous pouvons ainsi représenter les pavages de  $\mathbb{R}^2$  par l'ensemble des tuiles, chacune étant représentée par son type et son vecteur déplacement.

Par commodité, on notera les types des tuiles uniquement par les suites d'indices. Ainsi,  $\{v_i, v_j\}$  deviendra  $ij$ . Dans les cas où certains vecteurs ont une multiplicité supérieure à 1, on notera  $i', i'', i'''$  les duplications successives du vecteur  $v_i$ .

## 2.6 Flips

Nous nous intéressons à présent à la construction de pavages. Il est clair qu'étant donné un zonotope, on peut facilement construire un de ses pavages (en ajoutant les sections successives dans un ordre donné, voir Figure 2.14). Le problème consistant à en construire d'autres peut être abordé par la notion de flips. Un flip est une réorganisation locale de tuiles, permettant d'obtenir un nouveau pavage à partir d'un pavage existant. Nous les définissons à présent de façon plus précise.

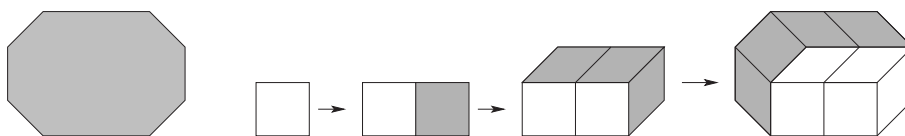


FIG. 2.14 – Exemple de construction d'un pavage

### 2.6.1 Pavages d'un $d + 1$ -zonotope unitaire

Considérons un zonotope unitaire de codimension 1 (ainsi  $D = d + 1$ ). On vérifie facilement qu'un tel zonotope admet deux pavages :

Soit  $V = (v_1, \dots, v_{d+1})$  la suite de vecteurs de  $V$ , et  $p_0$  la proto-tuile construite avec les  $d$  premiers vecteurs : il existe un pavage  $T$  avec une tuile  $t_0$  de type  $p_0$  tel que  $T_{\{v_{d+1},1\}}^+$  soit vide et  $T_{\{v_{d+1},1\}}^- = \{t_0\}$ , et un pavage  $T'$  tel que  $T_{\{v_{d+1},1\}}^-$  soit vide et  $T_{\{v_{d+1},1\}}^+ = \{t_0\}$ . Voir Figure 2.15.

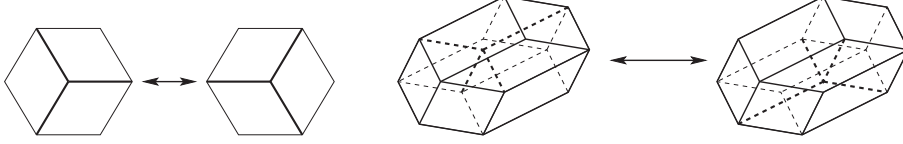


FIG. 2.15 – Exemples de flips en dimension 2 et 3

Dans ce qui suit, on considérera arbitrairement l'un de ces pavages comme étant en *position haute*, et l'autre en *position basse*. Un *flip* est le passage d'une position à l'autre.

Remarquons que chacun de ces deux pavages est symétrique de l'autre par rapport au vecteur  $\sum_{i=1}^{d+1} v_i/2$ .

Toutes les tuiles de ces deux pavages sont adjacentes 2 à 2, car deux tuiles quelconques ont exactement  $d - 1$  vecteurs en commun, et les lignes de de Bruijn sont de longueur 2. Les ordres respectifs des tuiles dans les lignes de de Bruijn des deux pavages sont inverses l'un de l'autre.

### 2.6.2 Espaces de pavages

Les pavages de zonotopes unitaires de codimension 1 décrits précédemment apparaissent, translatés, dans des pavages de plus grands zonotopes (au sens des multiplicités associées aux vecteurs, ou de la codimension). Supposons qu'un pavage  $T_z$  d'un tel zonotope unitaire apparaisse, translaté d'un vecteur de déplacement  $v$ , dans un pavage  $T$  d'un zonotope  $Z$  (formellement,  $T_z + v \subseteq T$ ). Alors le pavage  $T' = ((T \setminus (T_z + v)) \cup (T'_z + v))$  est obtenu de  $T$  par un *flip géométrique* (ici  $T'_z$  est le pavage du support de  $T_z$  après le flip). Le *type* du flip est le type de  $z$ , support de  $T_z$ . Ce flip est *montant* si  $T_z$  est en position basse, et son opposé est un flip *descendant*.

L'*espace des pavages* d'un zonotope  $Z$  est le graphe symétrique étiqueté dont les sommets sont les pavages de  $Z$ , et deux pavages sont liés par une arête s'ils diffèrent d'un flip géométrique. L'étiquette de l'arête est le type du flip (voir Figure 2.16).

Les arêtes de l'espace des pavages peuvent être orientées par l'orientation des flips. On peut définir une relation entre pavages de la façon suivante : étant donnés deux pavages  $T$  et  $T'$ , on dira que  $T \leq_{\text{flip}} T'$  s'il existe une suite de flips montants menant de  $T$  à  $T'$ . Il sera montré plus tard que cette relation est effectivement une relation d'ordre, mais ceci n'est pas vrai *a priori*.

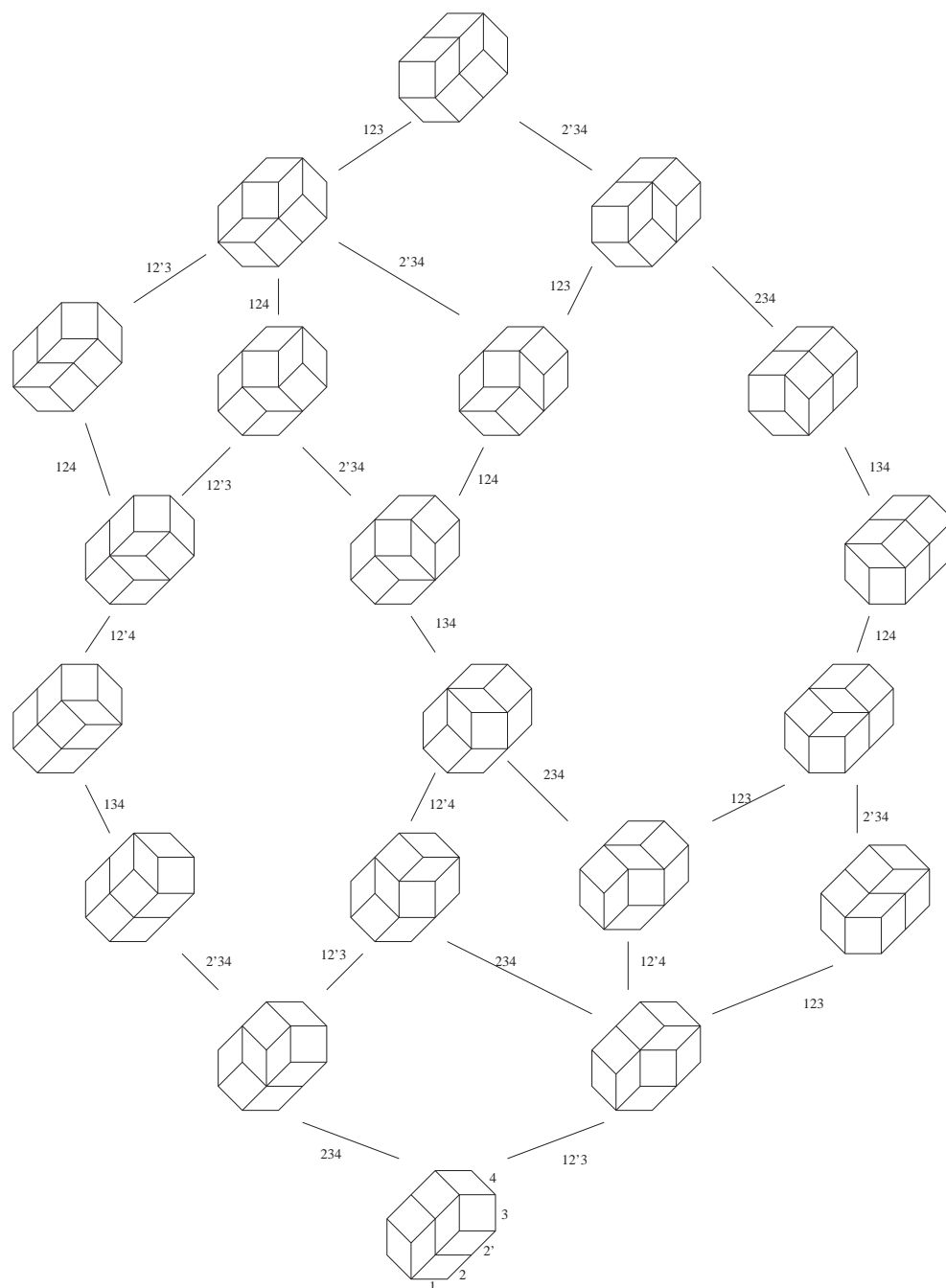


FIG. 2.16 – L'espace des pavages d'un octogone avec un côté de longueur 2

Dans ce qui suit, on notera un flip par la suite des indices des vecteurs définissant le  $(d + 1)$ -zonotope unitaire support du flip.

Notons que la représentation canonique des pavages permet cette étude, la proposition suivante établissant la compatibilité des flips avec les transformations élémentaires.

**Proposition 2.6.1** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux pavages d'un même zonotope, et  $T'_1$  et  $T'_2$  leurs images respectives par une transformation, c'est-à-dire qu'il existe une composition de transformations élémentaires  $\Phi_{\text{pavage}}$  telle que  $T'_1 = \Phi_{\text{pavage}}(T_1)$  et  $T'_2 = \Phi_{\text{pavage}}(T_2)$ . Si  $T_1$  et  $T_2$  diffèrent d'un flip, alors  $T'_1$  et  $T'_2$  aussi.*

**Preuve :** Nous avons vu précédemment que l'adjacence de tuiles est conservée par les relations d'équivalences entre pavages. Soit  $\{t_i\}$  l'ensemble des tuiles flippées entre  $T_1$  et  $T_2$ . Ces tuiles sont adjacentes deux à deux. Ainsi, leurs images dans  $T'_1$  et dans  $T'_2$  sont également adjacentes deux à deux. Par définition, le support du flip ne peut être pavé que de deux façons. Ainsi, les pavages  $T'_1$  et  $T'_2$  diffèrent d'un flip.  $\square$

**Proposition 2.6.2** *Deux zonotopes équivalents ont même espace de pavage.*

**Preuve :** Nous avons vu précédemment que les pavages de zonotopes équivalents peuvent être mis en correspondance deux à deux, et que la relation de flip est conservée par la relation d'équivalence entre pavages, ce qui donne directement le résultat.  $\square$

Notons que ce résultat implique que l'étude des cas canoniques se généralise à tous les pavages de zonotopes par les relations d'équivalence. Ceci s'applique en particulier aux résultats de structure.

Par ailleurs, un résultat important est que ces flips induisent une connexité de l'ensemble des pavages d'un zonotope pour  $d = 2$ , i.e. tous les pavages d'un zonotope de dimension 2 peuvent être déduits de l'un d'entre eux par des suites de flips (voir [Des97, Eln97, Ken93]). Cette question reste ouverte dès la dimension 3.





## Chapitre 3

# Codage de pavages de zonotopes de dimension 2

Nous nous restreignons dans ce chapitre au cas de dimension 2, donc aux pavages de polygones à nombre de côtés pair et à symétrie centrale par des parallélogrammes de côté unitaire. Nous présentons ici un codage de ces pavages par un graphe déduit des relations d'adjacence entre tuiles, et montrons la relation d'équivalence qui lie les deux classes d'objets.

### 3.1 Préliminaires

Nous supposons dans ce chapitre que les pavages présentés sont canoniques. Etant donnés deux vecteurs  $v = re^{i\theta}$  et  $v' = r'e^{i\theta'}$ , nous rappelons que  $v < v'$  dans l'ordre naturel si  $\theta < \theta'$ . Soit  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_D\}$  une famille de  $D$  vecteurs du plan non colinéaires deux à deux. On suppose que  $v_i < v_{i+1}$  dans l'ordre naturel. Soit  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_D\}$  une famille de  $D$  entiers positifs. L'entier  $m_i$  est la *multiplicité* de  $v_i$ . Le  $2D$ -gone  $(V, M)$  associé à  $V$  et  $M$  est la partie du plan affine définie par :

$$\left\{ \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq m_i, m_i \in M, v_i \in V \right\}$$

Il existe plusieurs définitions équivalentes pour ces objets. Par exemple un  $2D$ -gone peut être vu comme la projection d'un hypercube de dimension  $D$  sur le plan. Voir [Zie95] pour plus de détails. Pour  $D = 2$ , les  $2D$ -gones sont des parallélogrammes ; pour  $D = 3$  ce sont des hexagones ; pour  $D = 4$  des octogones ; pour  $D = 5$  des décagones, etc. Voir figure 3.1.

Etant donné un  $2D$ -gone  $P$  associé à  $(V, M)$ , une *proto-tuile* de  $P$  est un  $2D$ -gone construit sur deux vecteurs de  $V$ , chacun avec multiplicité 1. Ainsi, chaque proto-tuile est un parallélogramme défini par deux vecteurs

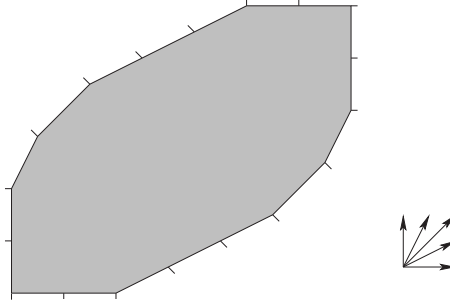


FIG. 3.1 – Un ensemble de vecteurs et son décagone associé. Les multiplicités respectives sont 2,3,1,1,2

de  $V$ , et on ne fera aucune différence entre la proto-tuile en temps que figure et la paire de vecteurs servant à la définir.

Finalement, un pavage  $T$  d'un  $2D$ -gone  $P$  est un ensemble de tuiles (c'est-à-dire de copies de proto-tuiles translatées) qui couvre exactement  $P$  et tel qu'il n'y ait aucun recouvrement entre tuiles. Ainsi,  $T$  est un ensemble de couples dont la première composante est la paire de vecteurs définissant une proto-tuile, et la seconde est un déplacement. Les translations utilisées dans les pavages de  $2D$ -gones peuvent toujours être représentées comme des combinaisons linéaires de vecteurs de  $V$  à coefficients entiers :  $t = \sum_i t_i v_i$ ,  $t_i$  étant un entier compris entre 0 et  $m_i$ . Nous prendrons comme vecteur translation le vecteur des hauteurs canoniques principales, et  $t$  sera décrit par un vecteur de dimension  $D$ ,  $t = (t_1, \dots, t_D)$  où  $t_i$  est la hauteur associée à  $v_i$ . Deux pavages  $T$  et  $T'$  de deux  $2D$ -gones  $P$  et  $P'$  sont *équivalents* si  $T = T'$ , où  $T$  et  $T'$  sont vus comme des ensembles de couples.

Soient  $P$  un  $2D$ -gone, et  $T$  un de ses pavages. La  $i$ -ème *famille de de Bruijn* de  $T$  est l'ensemble des tuiles de  $T$  construites sur le vecteur  $v_i$ . De plus, chaque famille peut être décomposée en *lignes de de Bruijn* : la  $j$ -ème ligne de la  $i$ -ème famille est l'ensemble des tuiles construites avec  $v_i$  et dont la  $j$ -ème composante du vecteur de translation vaut  $j - 1$ . Pour des raisons pratiques, nous dirons également que la  $j$ -ème ligne de la  $i$ -ème famille est la  $\alpha$ -ème ligne de de Bruijn, où  $\alpha = \sum_{k=1}^{i-1} m_k + j$ ,  $m_k$  étant la multiplicité de la  $k$ -ème famille. Nous définissons aussi  $f(\alpha)$  comme l'indice du vecteur associé à la  $\alpha$ -ème ligne, c'est-à-dire que  $f(\alpha)$  est le numéro de la famille contenant la ligne  $\alpha$ . Notons que deux lignes appartenant à une même famille n'ont jamais de tuile commune, alors que deux lignes de familles différentes ont exactement une tuile en commun dans le pavage. De plus, chaque ligne partage le pavage en deux parties disjointes. Nous utiliserons ces propriétés classiques (voir [dB81]) dans la suite.

Nous avons tout d'abord besoin d'un certain nombre de notations que nous introduisons maintenant.

**Définition 4** Soit  $P = (V, M)$  un 2D-gone. Pour tout  $k$ ,  $1 \leq k \leq D$  on définit le  $k$ -ème côté de  $P$  comme l'ensemble des points :

$$\left\{ \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i, \forall i < k : \lambda_i = m_i, \forall i > k : \lambda_i = 0, \text{ et } 0 \leq \lambda_k \leq m_i \right\}$$

De la même façon, le  $(k + D)$ -ème côté de  $P$  est défini par

$$\left\{ \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i, \forall i > k : \lambda_i = m_i, \forall i < k : \lambda_i = 0, \text{ et } 0 \leq \lambda_k \leq m_i \right\}$$

Chaque côté  $i$  (ou  $i + D$ ) du 2D-gone peut également être divisé en  $i$  parties égales, appelées *pas*, correspondant chacune à une copie du vecteur  $v_i$ . Chaque pas correspond exactement, par définition du pavage, au côté d'une tuile s'appuyant sur le bord. Ainsi, la  $j$ -ème tuile du  $i$ -ème côté est la tuile dont un côté est sur la  $j$ -ème copie de  $v_i$  sur le  $i$ -ème côté, soit le  $j$ -ème pas du côté  $v_i$ .

Notons que la tuile  $j$  du côté  $i$  est une extrémité de la  $\alpha = \sum_{k=1}^{i-1} m_k + j$ -ème ligne de de Bruijn du pavage.

De plus, l'enveloppe de  $P$ , notée  $H(P)$ , est l'union de tous les côtés de  $P$ . Nous dirons également qu'une tuile  $t$  est sur le  $i$ -ème côté de  $P$  si un des côtés de  $t$  est inclus dans le  $i$ -ème côté de  $P$ . Voir figure 3.2.

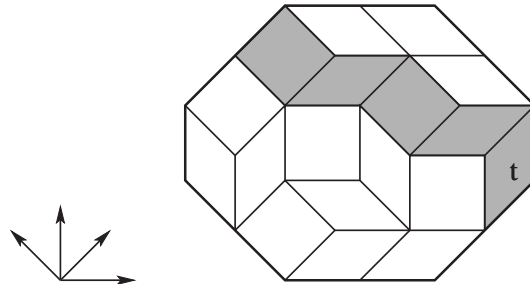


FIG. 3.2 – Un pavage (P), avec ses vecteurs de définition. En gras  $H(P)$ . Notons que  $t$  est extrémité de la 4-ème ligne de de Bruijn, et qu'elle appartient au 2-ème et au 3-ème côté.

Nous pouvons à présent introduire la notion de graphe d'adjacence.

**Définition 5 (graphe d'adjacence d'un pavage)** Soit  $T$  un pavage d'un 2D-gone donné  $(V, M)$ , et soit  $n = |T|$  le nombre de tuiles de  $T$ . Soit  $\pi : T \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  une numérotation des tuiles de  $T$ . Le graphe d'adjacence de  $T$  est le

graphe non orienté  $A(T) = (V_T, E_T)$ , où  $V_T = \{\pi(t), t \in T\}$  et  $\{\pi(t), \pi'(t)\} \in E_T$  si et seulement si  $t$  et  $t'$  ont un côté (un côté est ici une face de dimension 1) en commun dans  $T$ . Voir figure 3.3 pour un exemple.

Nous allons voir par la suite que ce graphe d'adjacence recèle beaucoup d'information sur le pavage. Cependant, le fait que deux pavages aient même graphe d'adjacence n'implique pas qu'ils sont équivalents : par exemple les pavages  $T_1$  et  $T_3$  de la figure 3.4. ont même graphe d'adjacence. Pour obtenir une bijection entre l'ensemble des pavages d'un 2D-gone et l'ensemble des graphes d'adjacence, nous introduisons maintenant le graphe de de Bruijn.

**Définition 6 (graphe de de Bruijn d'un pavage)** Soient  $A = (V, E)$  le graphe d'adjacence d'un pavage  $T$  d'un 2D-gone  $P$ , et  $\pi$  la correspondance entre les tuiles de  $T$  et les sommets de  $A$ . Le graphe de de Bruijn  $A' = (V, E, \lambda, \nu)$  est un graphe avec sommets étiquetés et un sommet distingué  $\nu$ . L'étiquetage  $\lambda(t)$  de  $t \in V$  est une paire d'entiers  $\{i, j\}$  telle que les deux lignes de de Bruijn contenant la tuile  $\pi^{-1}(t)$  sont la  $j$ -ème et la  $i$ -ème. Le sommet  $\nu$ , appelé origine du graphe, est associé à la tuile dont le vecteur translation est  $(0, \dots, 0)$  et qui est sur le premier côté de  $P$ . Voir figure 3.3.

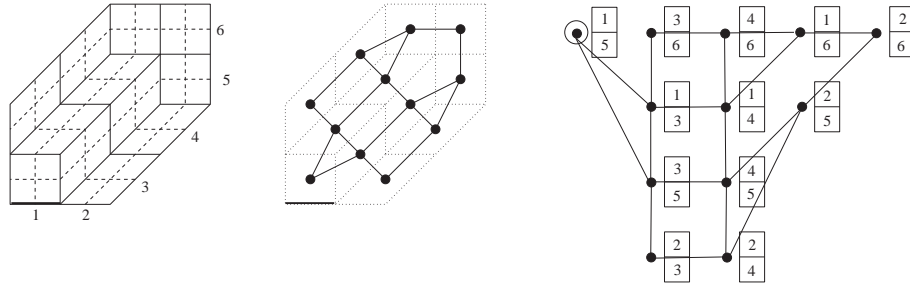


FIG. 3.3 – Un pavage, son graphe d'adjacence et son graphe de de Bruijn. En gras le côté définissant l'origine.

**Théorème 3.1.1** Etant donné le graphe de de Bruijn d'un pavage  $T$ , l'algorithme 1 construit un pavage équivalent à  $T$  en temps  $O(n)$ , où  $n$  est le nombre de tuiles du pavage, c'est-à-dire le nombre de sommets du graphe.

**Preuve :** L'idée de l'algorithme est de commencer par l'origine du graphe, puis de faire un parcours en largeur afin de calculer la tuile associée à chaque sommet, c'est-à-dire le couple de vecteurs qui définissent la proto-tuile, et le vecteur déplacement.

Considérons un sommet  $v$  étiqueté  $\{\alpha, \beta\}$ , ce qui signifie qu'il correspond

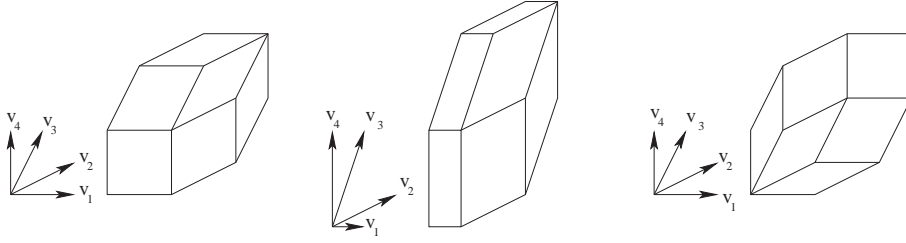


FIG. 3.4 – Trois pavages d’un même octogone, respectivement  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  de gauche à droite ;  $T_1$  et  $T_2$  ont même codage, donc correspondent à un même pavage, alors que  $T_3$  diffère des deux autres.

à une tuile  $t = (\tau, trans)$  dans la  $\alpha$ -ème et la  $\beta$ -ème ligne de de Bruijn. Il est clair, de par la définition de  $f$ , que la proto-tuile  $\tau$  est définie par  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ . La fonction  $f$  est aisément calculable, puisque deux lignes de de Bruijn  $\gamma$  et  $\delta$  sont dans la même famille si et seulement si elles ne se coupent pas, c’est-à-dire s’il n’y a pas de sommet étiqueté  $\{\gamma, \delta\}$  dans le graphe de de Bruijn. Ainsi, on peut aisément trouver toutes les lignes appartenant à une même famille de de Bruijn, et donc trouver les familles de de Bruijn. On obtient alors la proto-tuile  $\tau$ .

Le point suivant est de trouver les vecteurs déplacement. Chacun d’eux est déduit du vecteur déplacement d’un sommet déjà visité. Comme on commence avec un sommet de vecteur déplacement  $(0, \dots, 0)$  (l’origine), et comme on visite les sommets en largeur d’abord, un voisin  $v'$  d’un sommet  $v$ , et visité après  $v$ , a nécessairement un vecteur déplacement supérieur ou égal à celui de  $v$ . Supposons que l’on ait déjà calculé la tuile  $t = (\tau, trans)$  qui correspond à  $v$ , et considérons la tuile  $t' = (\tau', trans')$  qui correspond à  $v'$ . Comme vu précédemment, on a déjà  $t = \{\alpha, \beta\}$  et  $t' = \{\beta, \gamma\}$  avec  $trans' \geq trans$ . Les six cas présentés figure 3.5 peuvent être obtenus. Ils conduisent à deux possibilités :

- si  $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$  (figure 3.5 (a)) ou  $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$  (figure 3.5 (b)), alors  $trans' = trans$
- dans tous les autres cas la  $f(\alpha)$ -ème composante du vecteur translation doit être incrémentée.

Ces remarques mènent directement à l’algorithme 1, et comme on visite chaque sommet deux fois (une fois pour calculer  $f(x)$  pour tout  $x$ , et une fois dans le parcours en largeur), sa complexité est  $O(n)$ ,  $n$  étant le nombre de sommets.  $\square$

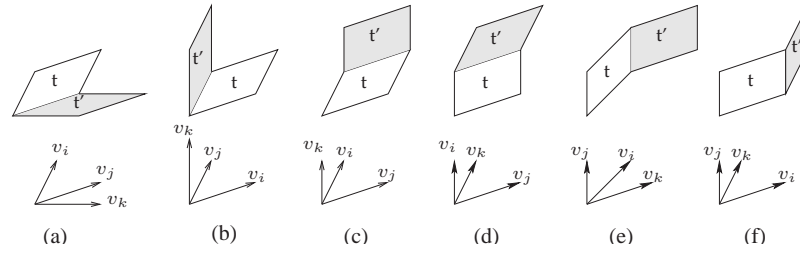


FIG. 3.5 – Les six configurations possibles pour la position de deux tuiles  $t$  et  $t'$  pendant le calcul des vecteurs translation

---

**Algorithme 1:** Construction d'un pavage à partir de son graphe de de Bruijn.

---

**Entrée :**  $G = (V, E, \lambda, \nu)$ , le graphe de de Bruijn d'un pavage  $T$ .

**Sortie :** Un pavage équivalent à  $T$ , donné par une liste  $(type, translation)$ .

---

**début**

Soit  $\{\alpha, \beta\} = \lambda(\nu)$  ;

Mettre tous les sommets à "non marqué";

$resu \leftarrow \{(\{f(\alpha), f(\beta)\}, (0, \dots, 0))\}$ ;

$courant \leftarrow \{(\nu, (0, 0, \dots, 0))\}$ ;

Marquer  $\nu$  ;

**tant que**  $courant \neq \emptyset$  **faire**

**pour chaque**  $\tau = (v, trans)$  **de**  $courant$  **faire**

**pour chaque** sommet  $v'$  non marqué tel que  $(v, v') \in E$  **faire**

            Soit  $\{\alpha, \beta\}$  l'étiquette de  $v$ , et  $\{\beta, \gamma\}$  l'étiquette de  $v'$ ;

            Soit  $trans'$  une copie de  $trans$ ;

**si non**  $(f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma) \text{ ou } f(\gamma) > f(\beta) > f(\alpha))$

**alors**

                    Incrémenter la  $f(\alpha)$ -ème composante de  $trans'$  de 1;

$resu \leftarrow resu \cup \{(\{f(\beta), f(\gamma)\}, trans')\}$ ;

$current \leftarrow current \cup \{(v', trans')\}$ ;

                    Marquer  $v'$ ;

$courant \leftarrow courant \setminus \{v\}$ ;

Retourner  $(resu)$ ;

**fin**

---

Ce résultat montre que toute l'information d'un pavage de  $2D$ -gone est contenue dans son graphe de de Bruijn. Cependant, nous allons montrer que le graphe de de Bruijn contient de l'information redondante. Nous al-

lons en fait montrer que le graphe d'adjacence contient presque toute l'information nécessaire. Il suffit de rajouter deux marques au graphe d'adjacence de  $T$  pour pouvoir reconstruire  $T$ . Ceci conduit à la définition du graphe avec origines d'un pavage  $T$ .

**Définition 7 (graphe avec origines d'un pavage)** Soient  $T$  un pavage d'une  $2D$ -gone,  $A = (V, E)$  son graphe d'adjacence, et  $\pi$  la correspondance des tuiles avec les sommets. Le graphe avec origines associé à  $T$  est  $G = (V, E, v_1, v_2)$ , où  $v_1$  et  $v_2$  sont deux sommets de  $V$  appelés origines de  $G$  et définis comme suit. Soit  $t_1$  la tuile de  $T$  sur le premier côté de  $P$  avec vecteur de translation  $(0, \dots, 0)$ . Soit  $t_2$  la tuile sur un côté de  $P$  avec vecteur translation  $(1, 1, 0, \dots, 0)$  si  $t_1$  est aussi sur le deuxième côté de  $P$ , ou celle avec vecteur translation  $(1, 0, \dots, 0)$  sinon. Alors  $v_1 = \pi(t_1)$  et  $v_2 = \pi(t_2)$ . Voir figure 3.6 pour un exemple.

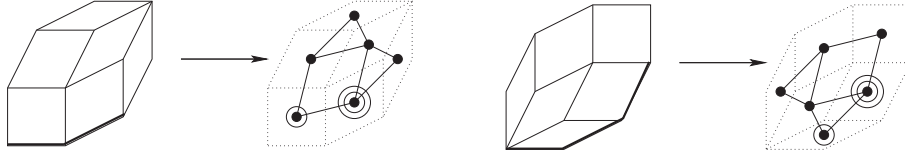


FIG. 3.6 – Deux pavages et leurs graphes avec origines. Notons que, si on retire les origines, les deux graphes sont isomorphes. En gras les côtés définissant les origines.

Remarquons que l'ajout des deux origines rend possible la distinction entre deux pavages différents ayant même graphe d'adjacence, comme explicité figure 3.6. Nous allons montrer dans la suite que la correspondance entre les graphes avec origines et les pavages de  $2D$ -gones est une bijection.

Plus précisément, étant donné un graphe d'adjacence, le pavage lui correspondant est défini modulo le choix des vecteurs. Ainsi, la première origine permet de fixer un point de départ permettant d'éliminer les diverses rotations du pavage associé au graphe, et la deuxième origine permet, étant donné le pavage avec une origine, d'éliminer les symétries restantes. Voir figure 3.6.

## 3.2 Dualité

Nous explicitons ici un algorithme permettant de construire le graphe de de Bruijn d'un pavage à partir de son graphe avec origines. Ceci permet, avec l'algorithme présenté précédemment, de construire le codage d'un pavage à partir uniquement de la donnée de son graphe avec origines.

La correspondance est bijective, ainsi, avec l'algorithme 1 et le théorème 3.1.1, ceci montre que les graphes introduits ci-dessus peuvent être



vus comme *deux* des pavages considérés, bien qu'étant très proches des graphes d'adjacence (seules les origines les distinguent). Notre algorithme a une complexité  $O(m.n)$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe, ou également le nombre de tuiles du pavage, et  $m$  est la somme des multiplicités définissant le 2D-gone.

Pour construire l'algorithme et prouver sa validité, nous montrons tout d'abord quelques propriétés liant les pavages de 2D-gones et leurs graphes d'adjacence. En particulier, certaines sous-structures, les *bordures* et les *événails*, vont jouer un rôle prépondérant. Nous les présentons maintenant, et montrons certaines de leurs propriétés.

**Définition 8 (bordure d'un pavage)** Soit  $T$  un pavage de 2D-gone, et  $\pi$  la correspondance entre les tuiles et les sommets de son graphe d'adjacence. Soit  $C \subseteq T$  l'ensemble des tuiles de  $T$  qui ont au moins un point dans  $H(P)$ . Nous définissons la bordure de  $T$ , notée  $B(T) = (\pi(C), E)$  comme suit :  $(\pi(t), \pi(t')) \in E$  si et seulement si  $t$  et  $t'$  sont dans  $C$ , sont adjacentes et telles qu'un point de leur intersection est dans  $H(P)$ . Notons que c'est un sous-graphe du graphe d'adjacence de  $T$ , mais ce n'est pas le graphe induit par  $C$  (certaines arêtes manquent). Voir figure 3.7.

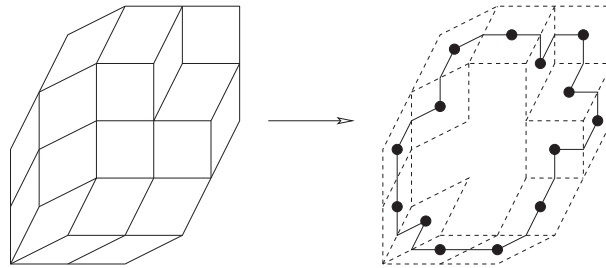


FIG. 3.7 – Gauche : un pavage. Droite : sa bordure et le graphe correspondant dans son graphe d'adjacence.

Une propriété remarquable est que la bordure contient tous les sommets de degré inférieur à 4 (c'est-à-dire de degré 2 ou 3), plus éventuellement quelques sommets de degré 4.

Dans la suite, nous ne faisons aucune différence entre la bordure d'un pavage  $T$  et le chemin correspondant dans le graphe d'adjacence de  $T$ , appelé bordure du graphe. De plus, on confondra une tuile  $t$  et le sommet correspondant dans le graphe.

### 3.2.1 Propriétés de la bordure

Tout sommet de degré 2 ou 3 appartient à la bordure. Celle-ci contient de plus certains sommets de degré 4. La bordure peut prendre trois formes, dépendant du zonotope (ou 2D-gone) :

1. si  $V = (v_1, v_2)$ , avec  $M = (1, n)$ , le zonotope est une ligne de tuiles de type identique. Alors le graphe est une chaîne, et la bordure aussi (figure 3.8 (a)),
2. si  $V = (v_1, v_2, v_3)$  avec  $M = (1, 1, n)$ , le zonotope est un hexagone de côtés de longueurs 1,1 et  $n$ . Alors le graphe comprend un point d'articulation, et la bordure est l'union de deux cycles joints par ce point d'articulation (figure 3.8 (b))
3. sinon, la bordure est un cycle

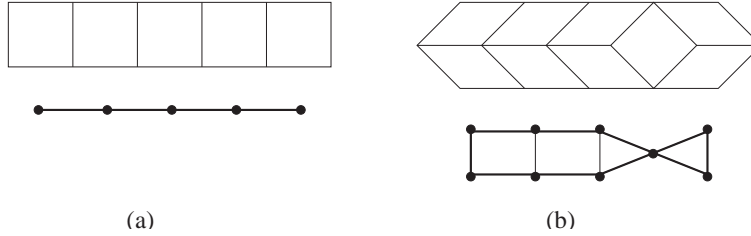


FIG. 3.8 – Cas particuliers avec leurs graphes d'adjacence. La bordure est représentée en gras.

Les deux cas particuliers peuvent être facilement reconnus : le premier correspond au cas où le graphe d'adjacence est réduit à un chemin, le second au cas où le graphe présente un unique point d'articulation. Le pavage est alors aisément reconstruit.

Dans la suite nous supposons n'être dans aucun de ces cas pathologiques. Ceci sans perte de généralité, d'après les remarques précédentes.

**Définition 9 (éventail)** Soit  $T$  un pavage d'un 2D-gone  $P$ , un éventail  $F(x)$  de  $T$  est une suite de tuiles  $(f_i)_{i=1,\dots,p}$  telles que :

- $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$   $f_i$  et  $f_{i+1}$  ont une facette en commun,
- $\cap_{i=1}^p f_i = x \in H(P)$ ,  $x$  est appelé la tête de l'éventail
- $f_1$  et  $f_p$  ont un côté dans  $H(P)$

Les tuiles  $f_1$  et  $f_p$  sont les extrémités de  $F$ , et  $p-1$  est la taille de  $F$ . De plus, on dit qu'un éventail  $F$  appartient au  $i$ -ème côté de  $P$  si une de ses extrémités a une facette incluse dans le  $i$ -ème côté de  $P$ .

Remarquons que deux tuiles se succédant sur le contour du pavage et ayant une facette en commun constituent un éventail de taille 1.

De plus, un éventail peut être vu comme le voisinage d'un sommet placé sur le contour du zonotope. Considérons deux tuiles  $f_1$  et  $f_2$  ayant chacune un point sur le contour et un point  $p$  en commun. Soit  $f_1$  et  $f_2$  sont adjacentes, soit il existe une tuile adjacente à  $f_1$  contenant  $p$ . Alors soit cette dernière est adjacente à  $f_2$ , soit il y a une autre tuile qui contient  $p$ . De proche en proche, un tel chemin doit atteindre  $f_2$ , sinon l'ensemble de tuiles n'est pas connexe, ce qui est exclu par construction. Alors,  $f_1$  et  $f_2$  sont extrémités d'un même éventail.

**Remarque :** la bordure d'un pavage est une concaténation de tous les éventails du graphe. De plus, les deux origines données dans le graphe sont les extrémités d'un éventail particulier.

Nous introduisons quelques notations pour les éventails.

**Notation :** Soit  $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  un éventail d'un pavage de  $2D$ -gone  $T$ . Pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq p-1$ , comme  $f_i$  et  $f_{i+1}$  ont exactement un côté en commun, il y a une ligne de de Bruijn qui contient  $f_i$  et  $f_{i+1}$ . Nous la notons  $L_i$ , et  $\mathcal{L}(F)$  est l'ensemble de toutes les lignes  $L_i$  de  $F$ . De plus, chaque  $L_i$  peut être divisée en deux parties, l'une contenant  $f_i$ , et l'autre contenant  $f_{i+1}$ , que nous appelons *demi-lignes*. Nous notons  $L_i^+$  la partie contenant  $f_i$ , et l'autre  $L_i^-$ . Voir figure 3.9.

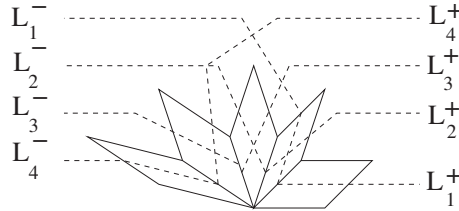


FIG. 3.9 – Un éventail et ses demi-lignes.

Notons que  $L$  (respectivement  $L_p$ ), la ligne contenant  $f_1$  (resp.  $f_p$ ) et différente de  $L_1$  (resp.  $L_{p-1}$ ), coupe  $L_1^+, L_2^+, \dots, L_{p-1}^+$  (resp.  $L_1^-, L_2^-, \dots, L_{p-1}^-$ ) en ordre croissant des indices (resp. décroissant) à partir de l'éventail.

Finalement, nous remarquons que, à partir de l'éventail,  $L_i^-$  coupe successivement  $L_{i+1}^+, L_{i+2}^+, \dots, L_{p-1}^+$ , et  $L_p$ .  $L_i^+$  coupe successivement  $L_{i-1}^-, L_{i-2}^-, \dots, L_1^-$ , et  $L$ . Ainsi, chaque ligne  $L_i^+$  coupe toutes les lignes  $L_j^-$  avec  $j < i$  et  $L_i^-$  coupe toutes les lignes  $L_j^+$  avec  $j > i$ . Par conséquent,  $L_i$  ayant coupé toutes les autres lignes du pavage, deux demi-lignes de même signe ne peuvent se couper.

De plus, par construction, on peut noter que, de même qu'une ligne de de Bruijn, une demi-ligne sépare l'ensemble des tuiles qu'elle ne contient pas en deux parties : formellement, on définit tout d'abord, pour chaque tuile  $t''$  de  $L_i$ , le segment représentatif de  $t''$  comme le segment liant les milieux des côtés de  $t''$  dont le type est  $\{v_i\}$  (où  $v_i$  est le vecteur définissant la famille de  $L_i$ ). Pour  $L_i^+$ , considérons l'ensemble  $S_i^+$  formé par l'union des segments représentatifs des tuiles de  $L_i^+$  ainsi que du segment commun à  $f_i$  et  $f_{i+1}$  (voir figure 3.10). Par définition, deux tuiles  $t$  et  $t'$  (n'appartenant pas à  $L_i^+$ ) sont dans la même partie s'il existe une fonction continue de  $[0, 1]$  vers le  $2D$ -gone  $P$  telle que  $f(0)$  est le centre de la tuile  $t$ ,  $f(1)$  est le centre de la tuile  $t'$ , et pour tout réel  $x \in [0, 1]$   $f(x)$  n'est pas dans  $S_i^+$ .

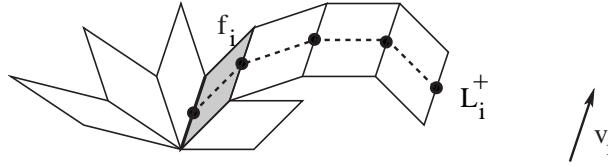


FIG. 3.10 – une ligne  $L_i^+$ , et les segments représentatifs des tuiles.

### 3.2.2 Plus courts chemins

Nous définissons tout d'abord les éléments fondamentaux des preuves suivantes, et montrons comment les structures particulières d'éventails et de lignes de de Bruijn sont caractérisées en termes de plus courts chemins dans le graphe du pavage.

**Définition 10 (indice de ligne, valeur de ligne)** Soit  $T$  un pavage,  $L$  une ligne de de Bruijn de  $T$ , et  $t_1, t_2$  deux tuiles de  $T$ . Comme vu précédemment,  $L$  partage  $T$  en trois parties  $T^+$ ,  $T^-$  et  $L$ . Nous définissons l'indice de ligne  $ind_L(t_1, t_2)$  comme suit :

- si  $t_1 \in L$  et  $t_2 \in T^+ \cup T^-$  alors  $ind_L(t_1, t_2) = 1/2$
- si  $t_1 \in T^+$  et  $t_2 \in T^-$ , ou  $t_1 \in T^-$  et  $t_2 \in T^+$ , alors  $ind_L(t_1, t_2) = 1$
- dans les autres cas,  $ind_L(t_1, t_2) = 0$

Soit  $\mathbf{B} = \{L_1, \dots, L_q\}$  un ensemble de lignes de de Bruijn et demi-lignes de  $T$ . La valeur de ligne  $ind_{\mathbf{B}}(t_1, t_2)$  est la somme  $\sum_{k=1}^q ind_{L_k}(t_1, t_2)$ .

Intuitivement, la valeur de ligne de  $t_1$  à  $t_2$  compte le nombre de lignes de  $\mathbf{B}$  coupées par un chemin de  $t_1$  à  $t_2$ .

Soit  $(t_0, t_1, \dots, t_r)$  un chemin de tuiles (c'est-à-dire que deux tuiles consécutives sont adjacentes), et considérons la suite  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$  telle que pour chaque entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq r$ ,  $a_i = ind_{\mathbf{B}}(t_1, t_i)$  (voir figure 3.11). On supposera

que  $\mathbf{B}$  est *bien fondé*, c'est-à-dire pour chaque ligne  $L$ , au plus un élément de  $\{L, L^+, L^-\}$  est dans  $\mathbf{B}$ , et si  $L^+$  (ou  $L^-$ ) est dans  $\mathbf{B}$ , alors l'extrémité de cette demi-ligne dans l'éventail n'appartient à aucune autre ligne (ou demi-ligne) de  $\mathbf{B}$ .

Remarquons que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r$ ,  $\text{ind}_L(t_1, t_{i+1}) = \text{ind}_L(t_1, t_i)$ , sauf si  $L$  est une ligne qui contient l'une des tuiles  $t_i$  et  $t_{i+1}$  et pas l'autre. Comme  $\mathbf{B}$  est bien fondé, dans tous les cas, il existe au plus deux telles lignes, pour chacune desquelles l'indice change d'au plus  $1/2$  unité. Alors  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ . De plus nous avons  $a_0 = 0$ . Ceci induit :

- $r \geq a_r$ , la valeur de ligne est une borne inférieure de la distance entre les deux tuiles
- l'équivalence :  $r = a_r$  si et seulement si pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq r$ ,  $a_{i+1} - a_i = 1$

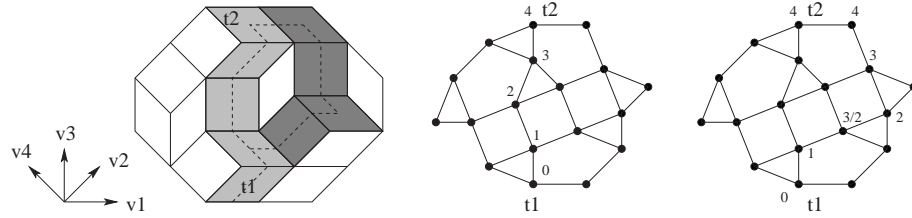


FIG. 3.11 – Deux chemins avec les mêmes extrémités, et les valeurs associées à chaque sommet sur deux chemins distincts,  $\mathbf{B}$  étant ici l'ensemble des lignes n'appartenant pas à la famille définie par  $v_1$ . Notons que la valeur de ligne en un sommet ne dépend pas du chemin suivi.

**Lemme 3.2.1** Soient  $t$  et  $t'$  deux tuiles de la bordure d'un pavage (précisément deux tuiles ayant degré 2 ou 3), reliées par une ligne de de Bruijn  $L$ , et soit  $(t_0, t_1, \dots, t_r)$  le chemin de tuiles commençant en  $t = t_0$  induit par  $L$  (c'est-à-dire que  $t_0 = t$ ,  $t_r = t'$  et toute tuile  $t_i$  est dans  $L$ ). Le chemin  $(t_0, t_1, \dots, t_r)$  est l'unique plus court chemin de  $t$  à  $t'$ .

**Preuve :** Nous prenons pour  $\mathbf{B}$  l'ensemble des  $r$  lignes de de Bruijn qui coupent  $L$ . Avec les notations précédentes, nous avons  $a_r = r$ , ce qui montre que le chemin donné est un plus court chemin.

En supposant que le plus court chemin de  $t$  à  $t'$  n'est pas unique, soit  $p$  un autre chemin de longueur  $r$  entre  $t$  et  $t'$ . Les chemins  $p$  et  $(t_0, t_1, \dots, t_r)$  ont un préfixe commun (éventuellement réduit à  $t = t_0$ ). Soit  $c$  le dernier sommet commun aux deux chemins, et  $d$  le premier sommet de  $p$  qui n'est pas dans  $L$ . Soit  $L_c$  la ligne coupée par  $L$  en  $c$ . La tuile  $d$  est nécessairement dans  $L_c$ . Alors  $\text{ind}_{L_c}(t, c) = \text{ind}_{L_c}(t, d)$ , et  $|\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, c) - \text{ind}_{\mathbf{B}}(t, d)| \leq 1/2$ , ce qui contredit le fait que  $p$  a pour longueur  $r$ .  $\square$

**Lemme 3.2.2** Soient  $T$  un pavage de zonotope, et  $t, t'$  deux tuiles de  $T$  ayant un point en commun et ayant chacune un côté sur un côté du 2D-gone. Le point commun est supposé sur l'enveloppe du 2D-gone. L'unique plus court chemin entre  $t$  et  $t'$  est l'éventail ( $t = f_1, f_2, \dots, f_r = t'$ ) de  $t$  à  $t'$ . Voir figure 3.12.

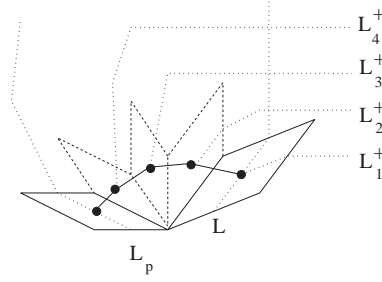


FIG. 3.12 – Un éventail et l'unique plus court chemin entre ses extrémités. (Lemme 3.2.2).

**Preuve :** L'argument est exactement le même que pour le lemme 3.2.1, en utilisant l'ensemble formé par  $\{L_i^+ | 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{L_p\}$  (nous rappelons que  $L_p$  est définie par le côté de  $t'$  qui est sur l'enveloppe du 2D-gone).  $\square$

Nous allons voir comment ces propriétés de plus courts chemins sont exploitées pour construire la bordure, puis le pavage.

### 3.2.3 Construction de la bordure

La première partie de l'algorithme pour construire un pavage équivalent à  $T$  en partant du graphe avec origines de  $T$  est de construire sa bordure. Les sommets de degré 2 ou 3 font évidemment partie de la bordure. Le point suivant est donc de trouver d'une part les sommets de degré 4 qui appartiennent à la bordure, et d'autre part de trouver l'ordre des sommets sur la bordure. Nous donnons tout d'abord quelques propriétés du graphe permettant de faire cela en même temps, puis un algorithme construisant la bordure d'un graphe avec origines (Théorème 3.2.10), ce qui complètera la première partie de la construction de  $T$  à partir de son graphe avec origines.

Ayant montré les propriétés de plus court chemin, nous commençons la partie principale de l'algorithme. Dans la suite, par "tuiles successives" on entend 2 tuiles telles que :

- soit elles sont la  $i$ -ème et la  $(i+1)$ -ème tuiles d'un côté du zonotope
- soit l'une est la  $m_i$ -ème tuile du côté  $i$  du zonotope, et l'autre la première du  $(i+1)$ -ème côté.

Ainsi, deux tuiles successives sont deux tuiles de degré 2 ou 3 adjacentes par un point sur le contour du zonotope, et donc extrémités d'un éventail.

L'algorithme que nous allons construire est un algorithme glouton qui, étant données deux tuiles successives de la bordure, trouve une tuile succédant à l'une des deux par construction d'éventails. Ainsi, en commençant aux origines, ceci construit de proche en proche les chemins entre tuiles successives de la bordure, ce qui aboutit à la construction complète de la bordure.

Soient  $T$  un pavage, et  $t_1, t_2, t_3$  trois tuiles telles que :

- $t_1$  et  $t_3$  sont extrémités d'un éventail, associé à un point  $v$  ( $v = t_1 \cap t_3 \cap H(T)$ )
- $t_1$  et  $t_2$  sont extrémités d'un éventail, associé à un point  $v'$  ( $v' = t_1 \cap t_2 \cap H(T)$ )

Nous supposons ici que l'éventail associé à  $v'$  a déjà été construit, et on veut construire l'éventail associé à  $v$ .

Soit  $c_0$  le côté de  $t_1$  sur le contour et contenant  $v$ .  $c_0$  induit une ligne de de Bruijn  $L$ , qui coupe le pavage en trois parties :  $T^+$ ,  $T^-$  et  $L$ . Nous supposons, sans perte de généralité, que  $t_3 \in T^-$ .

Soit  $c'$  le côté de  $t_2$  sur le contour et contenant  $v'$ .  $c'$  induit une ligne de de Bruijn  $L'$ .

Soit  $c_p$  le côté de  $t_3$  sur le contour et contenant  $v$ .  $c_p$  induit une ligne de de Bruijn  $L_p$ .

Soit  $t_{12}$  la tuile à l'intersection de  $L$  et  $L'$ , si elle existe. En particulier, cette tuile divise  $L$  en  $L^+$  et  $L^-$ .  $L^-$  est la partie de  $t_1$  à  $t_{12}$  exclue, et  $L^+$  l'autre partie de  $L$ .  $t_1$  est une des extrémités de  $L$ , nous appelons  $t_L$  l'autre extrémité de  $L$ . Ainsi,  $L^+$  est la partie de  $L$  allant de  $t_{12}$  à  $t_L$ . Voir figure 3.13.

Soient  $t'_1, t'_2, \dots, t'_p$  les tuiles de l'éventail induit par  $v$ , de sorte que le chemin de  $t_1$  à  $t_3$  soit  $t_1 = t'_1, t'_2, \dots, t'_p = t_3$ . Soit  $c_i$  le côté commun à  $t'_{i+1}$  et  $t'_i$ . Nous appelons  $L_i$  la ligne de de Bruijn induite par  $c_i$ . Voir figure 3.14.

Notons que  $c_0$  et  $c_p$  sont les côtés sur le contour induits par  $v$ .

Nous supposons également que  $t_1$  et  $t_3$  ne sont pas adjacentes (sinon la recherche de  $t_3$  est évidente).

Pour plus de simplicité, dans ce qui suit nous appellerons ceci la *situation de recherche d'éventail*.

Nous introduisons les notations suivantes :

- $A_1$  est l'ensemble des tuiles plus proches de  $t_1$  que de  $t_2$ , c'est-à-dire  $A_1 = \{t \in T, \text{dist}(t, t_1) < \text{dist}(t, t_2)\}$
- $A_2 = \{t \in T, \text{dist}(t, t_2) < \text{dist}(t, t_1)\}$
- $A_-$  est l'ensemble des tuiles à même distance de  $t_1$  et  $t_2$

Dans cette situation, deux cas sont possibles, qui dépendent de la position de  $t_2$ . Soit  $t_2$  est dans  $T^+$ , ce qui est le cas général, soit  $t_2$  est dans  $L$ . Ce

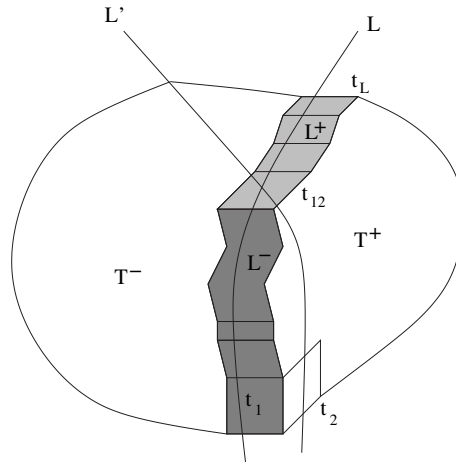
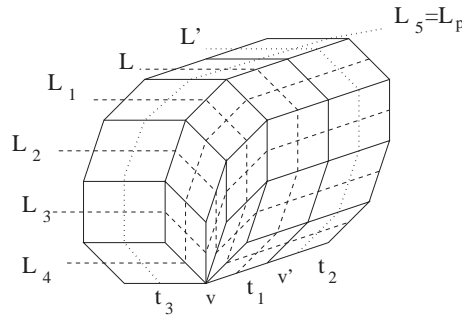
FIG. 3.13 – Le cas général. Gris clair :  $L^+$  ; Gris foncé :  $L^-$ 

FIG. 3.14 – La situation de recherche d'éventail, et la numérotation des lignes.

cas est caractérisé par le fait que  $t_1$  a alors degré 2, et  $t_1$  et  $t_2$  sont adjacentes. Ceci permet de séparer les deux cas de façon algorithmique.

Nous traitons tout d'abord le cas général.

**Cas général :**  $t_2 \in T^+$

Ce cas se subdivise en deux sous-cas. Soit  $L$ ,  $L'$  et  $L_p$  sont parallèles (ce qui signifie que  $c_0$ ,  $c_p$  et  $c'$  ont même support), soit au moins deux d'entre elles se coupent dans le pavage. Nous commençons avec ce dernier cas, qui est le plus général.

**a-  $c_0$ ,  $c_p$  et  $c'$  n'ont pas tous même support**

Nous supposons donc ici qu'au moins deux des lignes  $L$ ,  $L_p$  et  $L'$  se



coupent dans le pavage.

**Proposition 3.2.3** *On se place dans la situation de recherche d'éventail.*

Soit  $T_{\text{hull}}^+ = \{t \in T^+, \deg(t) < 4\}$ . On a alors :

1.  $L^- \subseteq A_1$
2.  $L^+ \cup T_{\text{hull}}^+ \subseteq A_2 \cup A_{=}$
3. si  $L$  et  $L'$  sont parallèles ( $c_0$  et  $c'$  ont même support), alors  $L \cup T^- \subseteq A_1$

Conséquence directe du second point : avec  $T_{\text{hull}}^- = \{t \in T^- | \deg(t) < 4\}$  et  $A_{1,\text{hull}} = \{t \in A_1 | \deg(t) < 4\}$ , on a  $A_{1,\text{hull}} \subseteq T_{\text{hull}}^- \cup \{t_L\}$ , où  $t_L$  est l'extrémité de  $L$  différente de  $t_1$  (donc incluse dans  $L^+$ ). Si de plus  $L$  et  $L'$  ne sont pas parallèles, alors  $A_{1,\text{hull}} \subseteq T_{\text{hull}}^-$ .

**Preuve :** Soit  $u_i$  la  $i$ -ème tuile de  $L$ , en commençant à  $t_1$ , et  $M_i$  la ligne coupant  $L$  en  $u_i$ . Nous prenons  $\mathbf{B}_i = \{M_j | 1 \leq j \leq i\}$ . Nous montrons tout d'abord que  $\text{dist}(u_i, t_2) \geq \text{dist}(u_i, t_1)$ .

Le lemme 3.2.1 implique que  $\text{dist}(t_1, u_i) = i - 1$ . Pour  $1 \leq j < i$ , on a  $\text{ind}_{M_j}(u_i, t_2) = 1/2$  si  $t_2 \in M_j$ , et  $\text{ind}_{M_j}(u_i, t_2) = 1$  sinon (en effet  $u_i \notin M_j$  pour  $i \neq j$ ). De plus, on a  $\text{ind}_{M_i}(u_i, t_2) = 0$  si  $t_2 \in M_i$  et  $\text{ind}_{M_i}(u_i, t_2) = 1/2$  sinon. Etant donné que  $t_2$  appartient à au plus deux lignes de de Bruijn, au plus deux des valeurs précédentes sont minimales. Ceci implique que  $\text{ind}_{\mathbf{B}_i}(u_i, t_2) \geq (i - 1/2) - 2 \times 1/2$ , ainsi  $\text{dist}(u_i, t_2) \geq i - 1$ . On a alors  $\text{dist}(u_i, t_2) \geq \text{dist}(u_i, t_1)$ .

1. Soit  $u_i \in L^-$ . Supposons  $\text{dist}(u_i, t_2) = i - 1$ , et soit  $(u_i = r_0, r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i = t_2)$  un chemin de longueur  $i - 1$  de  $u_i$  à  $t_2$ . Nous avons nécessairement  $\text{ind}_{\mathbf{B}_i}(u_i, r_j) = j$ . Nous montrons alors par induction que pour  $0 \leq j \leq i$ ,  $r_j = u_{i-j}$  : l'initialisation de l'induction est triviale, et en supposant  $r_j = u_{i-j}$ , on a  $\text{ind}_{\mathbf{B}_i}(u_i, r_{j+1}) = \text{ind}_{\mathbf{B}_i}(u_i, r_j) + 1$ . De plus on doit alors quitter  $M_j$ , c'est-à-dire que  $r_{j+1} \in L$  et donc  $r_{j+1} = u_{i-j-1}$ . Ceci implique  $t_2 = t_1$ , ce qui contredit l'hypothèse. Alors  $\text{dist}(u_i, t_2) > \text{dist}(u_i, t_1)$ .
2. Soit  $t \in L^+$ . L'unique plus court chemin de  $t$  à  $t_1$  suit  $L$ . De plus, le chemin de  $t$  à  $t_2$  consiste à suivre  $L^+$  jusqu'à  $t_{12}$ , puis à suivre  $L'$  jusqu'à  $t_2$ . Ce chemin a une longueur de  $\text{dist}(t, t_1)$ , parce que  $t_{12} \in A_{=}$  (toute ligne coupe  $L^-$  si et seulement si elle coupe  $L'^+$ ). Alors  $L^+ \subseteq A_{=} \cup A_2$ .

Soit alors  $t \in T_{\text{hull}}^+$

- (a) soit le plus court chemin de  $t$  à  $t_1$  contient au moins une tuile de  $L^+$  (dans ce cas un suffixe du chemin est une partie de  $L$ ), et on peut construire un chemin de même longueur allant de  $t$  à  $t_2$  en remplaçant la partie de  $t_{12}$  à  $t_1$  par le chemin de  $t_{12}$  à  $t_2$ . Alors  $t \in A_{=} \cup A_2$  (il peut exister un autre chemin de même longueur de  $t$  à  $t_2$ ).

- (b) dans l'autre cas, le plus court chemin de  $t$  à  $t_1$  coupe nécessairement  $L'$  sur une tuile  $t_{L'}$  de  $L'^-$  (ce dernier ensemble étant la partie de  $L'$  comprise entre  $t_2$  et  $t_{12}$ , à l'exclusion de  $t_{12}$ ). L'argument utilisé au point 1. ci-dessus induit que  $t_{L'} \in A_2$ , et donc  $t \in A_2$ . Ceci implique le résultat.
3. si  $L$  et  $L'$  sont parallèles, alors  $L = L^-$ , et le point 1. implique le résultat pour  $L$ . Pour  $T^-$ , ce cas est le symétrique du cas 2.(b). Le même argument conduit ici à la même conclusion, en échangeant les rôles respectifs de  $L$  et  $L'$ , et de  $T^+$  et  $T^-$ .  $\square$

**Lemme 3.2.4** Soit  $A_{1,\text{hull}} = \{t \in A_1, \deg(t) < 4\}$ . Nous avons alors :

1.  $\forall t \in A_{1,\text{hull}}, \text{dist}(t, t_1) \geq \text{dist}(t_3, t_1)$
2. si  $\text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)$ , alors  $t \in L_p$

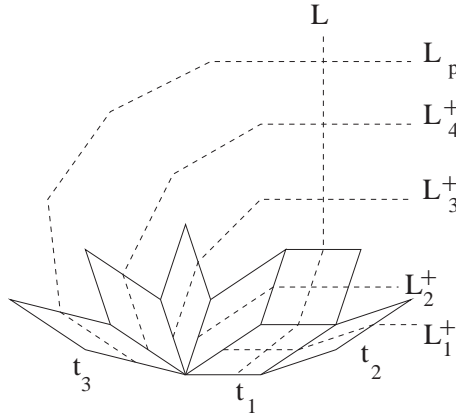


FIG. 3.15 – Les lignes qui doivent être coupées pour atteindre le bord, dans la situation de recherche d'éventail

**Preuve :** Soit  $t \in A_{1,\text{hull}}$ . D'après le lemme précédent, soit  $t \in T_{\text{hull}}^-$ , soit  $t = t_L$ .

Si  $t \in T_{\text{hull}}^-$ , alors :

- $\text{ind}_{L_1^+}(t, t_1) = 1/2$
- $\text{ind}_{L_i^+}(t, t_1) = 1$  pour  $2 \leq i \leq p-1$
- $\text{ind}_{L_p}(t, t_1) = 1/2$  si  $t \in L_p$ , 1 sinon

Alors, si  $\mathbf{B}$  est l'union des lignes précédentes, nous avons  $\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t_1) \geq p - 3 + 1 + 1/2 + 1/2 = p - 1$ . Comme  $\text{dist}(t, t_1) \geq \text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t_1)$  et  $\text{dist}(t_3, t_1) = p - 1$ , alors  $\text{dist}(t, t_1) \geq \text{dist}(t_3, t_1)$ . De plus, l'égalité est obtenue uniquement dans le cas où  $\text{ind}_{L_p}(t, t_1) = 1/2$ , et alors  $t \in L_p$ .

Si  $t = t_L$ ,  $L$  et  $L'$  sont parallèles (sinon  $t \in L^+$ , et d'après la proposition 3.2.3 on aurait  $t \in A_2 \cup A_=\$ , ce qui contredit  $t \in A_{1,\text{hull}}$ ). Alors  $L$  et  $L_p$  se coupent (le cas où les trois lignes sont parallèles est traité plus tard), et  $\text{ind}_{L_p}(t, t_1) \geq 1/2$ . Ceci conduit directement au même résultat que dans le cas précédent.  $\square$

**Lemme 3.2.5** *Soit  $t \in A_{1,\text{hull}}$  telle que  $\text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)$ . Soit  $(t_3 = r_0, r_1, \dots, r_k = t)$  une géodésique de  $t_3$  à  $t$ . Pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ , alors  $r_i \in A_{1,\text{hull}}$ .*

**Preuve :** Soit  $t \in A_{1,\text{hull}}$  telle que  $\text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)$  (d'après le lemme 3.2.4 on a alors  $t \in L_p$ ). Soit également  $(t_1 = s_0, s_1, \dots, s_{p-1} = t)$  une géodésique de  $t_1$  à  $t$ .

Cette géodésique coupe successivement  $L_1^+, L_2^+, \dots, L_{p-1}^+$ . Comme  $\text{dist}(t, t_1) = p - 1$ , aucune autre ligne n'est coupée par la géodésique, et ainsi  $s_0$  est nécessairement sur  $L_1^+$ ,  $s_1$  est sur  $L_2^+, \dots$ , et  $s_{p-1}$  est sur  $L_p$ .

Soit  $j$  l'indice de la dernière tuile  $s_i$  appartenant à l'éventail. Supposons que  $j < p - 1$ . D'après les conditions précédentes,  $s_{j+1}$  est sur  $L_{j+2}^+$ , donc  $s_{j+1}$  est nécessairement sur  $L_j^-$ , ainsi que  $s_j$ . Pour la même raison (si  $j + 1 < p - 1$ ),  $s_{j+2}$  est aussi sur  $L_j^-$ , et ainsi jusqu'à atteindre  $s_{p-1}$ .

L'ensemble de lignes de de Bruijn qui coupent la géodésique (c'est-à-dire  $L_j^-$ ) entre  $s_j$  et  $t$  est  $\{L_{j+1}, L_{j+2}, \dots, L_p\}$ . De plus ces lignes sont exactement celles qui atteignent le contour sur  $T^-$  entre  $t$  et  $t_3$ .

Alors, en commençant sur l'éventail,  $L_{j+1}^-$  coupe successivement  $L_{j+2}, L_{j+3}, \dots, L_p$ , et aucune autre ligne n'est coupée par  $L_{j+1}^-$ . On peut répéter le même argument : en commençant sur l'éventail  $L_{j+2}^-$  coupe successivement  $L_{j+3}, L_{j+4}, \dots$ , et  $L_p$ , et aucune autre ligne n'est coupée par  $L_{j+2}^-$ .

Sur l'autre côté, pour  $j \leq j' \leq p - 1$ , entre  $s_{j'}$  et l'éventail, la ligne  $L_{j'+1}^+$  coupe successivement  $L_j, L_{j+1}, \dots, L_{j'}$ , et aucune autre ligne n'est coupée par  $L_{j'+1}^+$  entre  $s_{j'}$  et l'éventail (avec la convention que  $L_p = L_p^+$  pour  $j' = p - 1$ ).

Ceci induit le résultat : la ligne  $L_p$  suit la bordure entre  $t_3$  et  $t$  et, pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ , on peut construire un chemin de longueur  $p - 1$  de  $t_1$  à  $r_i$ .  $\square$

**Proposition 3.2.6** *Soit  $X_3$  le sous-ensemble de  $A_{1,\text{hull}}$  formé des tuiles telles que  $\text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)$ . La tuile  $t_3$  est l'unique élément de  $X_3$  dont le degré est plus petit que le degré de toutes les autres tuiles de  $X_3$ .*

**Preuve :** Le résultat est évident, à partir du lemme précédent, aussitôt qu'on a remarqué que  $t_{L_p}$ , l'autre extrémité de  $L_p$ , ne peut pas être dans  $X_3$ . En effet, si  $L_p$  et  $L$  se coupent, alors  $L_p$  n'est pas dans  $A_1$ , d'après le lemme 3.2.1. Dans le cas contraire,  $L_p$  et  $L'$  se coupent, ce qui implique que  $\text{dist}(t_{L_p}, t_1) > \text{dist}(t_3, t_1)$ , en utilisant l'ensemble de lignes formé par  $L_i^+$

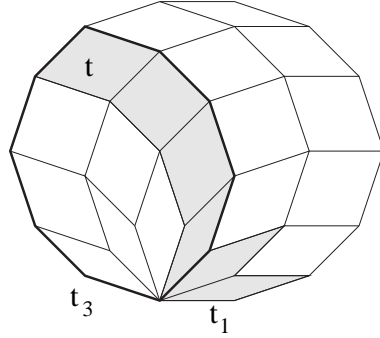


FIG. 3.16 – Preuve du lemme 3.2.5 : le zonotope unitaire (en gras), en gris la géodésique de  $t_1$  à  $t$ . L'éventail de  $t_1$  à  $t_3$  force le pavage du zonotope unitaire en entier, ce qui conduit au résultat.

pour  $1 \leq i \leq p-1$ , et  $L'$ . □

**b-**  $c_0, c_p$  et  $c'$  ont même support

Nous montrons tout d'abord une propriété particulière à ce cas, puis quelques cas particuliers qui amènent une étude plus approfondie. On se place dans la situation de recherche d'éventail, avec  $L, L_p$  et  $L'$  parallèles.

**Lemme 3.2.7** Soit  $A_{1,\text{hull}} = \{t \in A_1, \deg(t) < 4\}$ . Alors  $\forall t \in A_{1,\text{hull}}$ ,  $\text{dist}(t, t_1) \geq \text{dist}(t_3, t_1) - 1$ . De plus, s'il existe  $t$  telle que  $\text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1) - 1$ , alors  $t = t_L$ ,  $t_L$  étant l'extrémité de  $L$  différente de  $t_1$ .

**Preuve :** On peut utiliser les arguments du lemme similaire du cas général, sauf dans le cas  $t = t_L$ . Dans ce dernier cas, il est possible d'avoir  $\text{ind}_{L_{p-1}^+} = 1/2$ . Ainsi on obtient  $\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t_1) \geq p - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , ce qui amène à  $\text{dist}(t, t_1) \geq \text{dist}(t_3, t_1) - 1$ , et l'égalité ne peut être obtenue que pour  $t_L$ . □

Deux situations particulières peuvent se produire, que nous étudions maintenant en conservant les notations du lemme précédent :

1.  $\text{dist}(t_L, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1) - 1$ .

Ce cas correspond à la situation de la figure 3.17. Comme  $L$  est coupée par chaque demi-ligne  $L_i^+$  en une tuile  $u_i$ , la géodésique de  $t_1$  à  $t_L$  est nécessairement  $(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$ , avec  $t_1 = u_1$  et  $t_L = u_{p-1}$ . Comme  $L$  et  $L_p$  sont parallèles,  $L_p$  contient également  $p-1$  tuiles. De plus, en commençant en  $t_3$ ,  $L_p$  coupe successivement  $L_{p-1}, L_{p-2}, \dots, L_1$ . De même, en commençant en  $t_2$ ,  $L'$  coupe successivement  $L_1, L_2, \dots, L_{p-1}$ . Un point important pour la suite est que  $u_2$  est adjacent à une tuile de  $A_2$ . Ceci permet de vérifier si on est dans ce cas.

Soit  $X_3$  l'ensemble  $\{t \in A_1, \text{dist}(t, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)\}$  et  $X_{\min}$  l'ensemble des éléments de  $X_3$  de degré minimal. On a  $t_3 \in X_{\min}$ ,  $\text{card}(X_{\min}) = 2$ , et l'élément  $t_4$  de  $X_{\min}$  différent de  $t_3$  est l'autre extrémité de  $L_p$ .

Notons que  $\text{dist}(t_4, t_L) = 2$ , et  $\text{dist}(t_3, t_L) = p - 1$ , qui vaut au moins 3, puisque l'on a éliminé les cas particuliers où la bordure n'est pas un cycle.

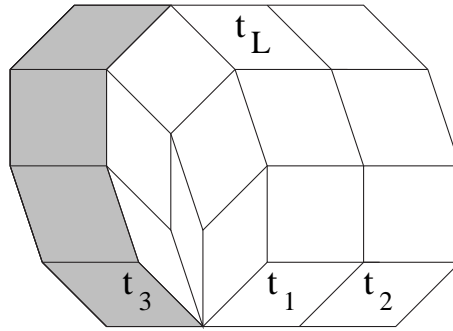


FIG. 3.17 – Le cas particulier pour lequel  $t_L$  est plus proche de  $t_1$  que  $t_3$ , et toutes les tuiles de  $L_p$  (en gris) sont à la même distance de  $t_1$ .

2.  $\text{dist}(t_L, t_1) = \text{dist}(t_3, t_1)$ .

Dans ce cas, d'après la situation précédente, une ligne de de Bruijn  $L''$  non parallèle à  $L'$  et  $L_p$  est ajoutée au pavage, puisque  $L$  contient toutes les tuiles  $u_i$  de la situation précédente plus une autre tuile. Cette situation est celle décrite par la figure 3.18. L'espace compris entre  $L$  et  $L'$  contient uniquement certaines tuiles de  $L''$ , et ces tuiles sont dans  $A_{=}$ .

Avec les notations ci-dessus,  $\text{card}(X_{\min}) \leq 2$ , et si  $\text{card}(X_{\min}) = 2$ , alors l'élément de  $X_{\min}$  différent de  $t_3$  est  $t_L$ .

On peut remarquer que la tuile de  $L$  adjacente à  $t_1$  est également adjacente à une tuile de  $A_2 \cup A_{=}$ , et que la tuile de l'éventail adjacente à  $t_1$  n'a pas cette propriété, puisqu'elle est dans  $T^-$ .

### 3.2.4 Cas particulier : $t_2 \in L$

Maintenant que nous avons vu comment trouver le successeur d'une tuile sur la bordure dans le cas  $t_2 \in T^+$ , nous devons étudier le cas particulier où  $t_2 \in L$ . Nous procédons comme dans le cas général, la différence étant le critère qui permet d'exclure les tuiles de  $T^+$ .

**Lemme 3.2.8** *Considérant la situation de recherche d'éventail, si  $t_2 \in L$ , alors :*

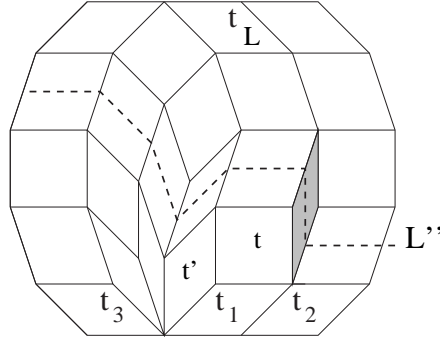


FIG. 3.18 – Cas particulier avec une ligne coupant  $L$ . Notons que la tuile adjacente à  $t$  (en gris) est dans  $A_{=} \cup A_2$ , contrairement à toutes les tuiles adjacentes à  $t'$ .

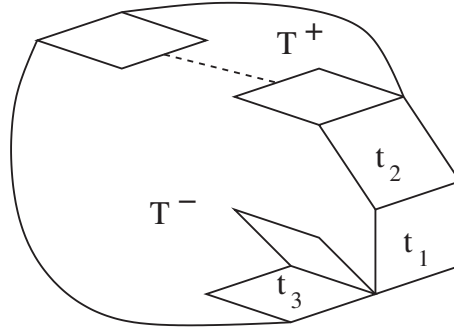


FIG. 3.19 – Le cas  $t_2 \in L$ .

1. soit  $t_x$  une tuile de  $T^+ \cup L \setminus \{t_1\}$ . Alors  $t_x \in A_2$ . Plus précisément, toute géodésique de  $t_1$  à  $t_x$  contient  $t_2$ .
2.  $t_3 \in A_1 \cup A_{=}$

**Preuve :**

1. si  $t_x \in L$ , alors la géodésique de  $t_x$  à  $t_1$  est incluse dans  $L$ . Comme la seule tuile de  $L$  adjacente à  $t_1$  est  $t_2$ ,  $t_x \in A_2$ . Donc  $L \setminus \{t_1\} \subseteq A_2$ . Si  $t_x \in T^+$ , considérons un plus court chemin de  $t_1$  à  $t_x$ . Supposons que ce plus court chemin ne commence pas par  $(t_1, t_2, \dots)$ . Alors il commence par  $(t_1, t', \dots)$ , avec  $t' \in T^-$ . Ainsi ce chemin contient une tuile  $t''$  (différente de  $t_1$ ) qui est sur  $L$ , étant donné que  $t_x \in T^+$ . Le lemme 3.2.1 implique que l'unique plus court chemin entre  $t_1$  et  $t''$  suit  $L$ , ce qui contredit l'hypothèse, et  $t_x \in A_2$ .
2. Il est évident que  $ind_L(t_2, t_3) = ind_{L_p}(t_2, t_3) = 1/2$ . De plus, pour  $3 \leq i \leq p-1$ ,  $ind_{L_i^+}(t_2, t_3) = 1$ , et  $ind_{L_2^+}(t_2, t_3) \geq 1/2$ . Ainsi, en consi-

dérant l'ensemble  $\mathbf{B}$  de toutes ces lignes, on obtient  $ind_{\mathbf{B}}(t_2, t_3) \geq p - 3 + 3 \times 1/2$ . Ceci conduit à  $dist(t_2, t_3) \geq p - 1$  car  $dist(t_2, t_3) \geq ind_{\mathbf{B}}(t_2, t_3)$  et les distances sont entières.  $\square$

**Lemme 3.2.9** Soit  $A_{1,=,hull} = \{t \in A_1 \cup A_=, deg(t) < 4\}$ . Alors :

1.  $\forall t \in A_{1,=,hull}, dist(t, t_1) \geq dist(t_3, t_1)$ .
2. si  $dist(t, t_1) = dist(t_3, t_1)$ , alors  $t \in L_p$ .

**Preuve :** Cette preuve est similaire à celle du lemme 3.2.4, nous ne la donnons pas extensivement.  $\square$

Ce lemme implique en particulier que  $card(X_{min}) \leq 2$ , où  $X_{min}$  est défini comme précédemment. En effet, les éléments tels que  $dist(t, t_1) = dist(t_3, t_1)$  étant dans  $L_p$ , les seuls pouvant appartenir à  $X_{min}$  sont  $t_3$  et  $t_{L_p}$ .

Si  $card(X_{min}) = 2$ , nous sommes dans un cas similaire à celui de la figure 3.18, et il existe un zonotope unitaire entre  $L$  et  $L_p$ . Le lemme 3.2.9 souligne le fait que  $L \setminus \{t_1\} \in A_2$ . Par construction  $dist(t_{L_p}, t_L) = 2$ , c'est-à-dire que  $dist(t_{L_p}, A_2) = 2$ . De plus, avec les mêmes notations que précédemment, et en choisissant pour  $\mathbf{B}$  l'ensemble  $\{L_i^- | 1 \leq i \leq p-1\} \cup L_p$ , nous obtenons  $ind_{\mathbf{B}}(t_3, t_L) \geq p - 1 + 1/2$ , car  $ind_{L_p}(t_3, t_L) = 1/2$  et  $\forall i$ ,  $ind_{L_i^-}(t_3, t_L) = 1$ . De plus,  $p-1 \geq 2$  (sinon il n'y a qu'une tuile dans l'éventail, et elle est adjacente à  $t_1, t_3, t_L$  et  $t_{L_p}$ , et ce cas particulier a été exclu). Alors  $dist(t_3, A_2) \geq 3$ , étant donné que toutes les autres tuiles de  $A_2$  sont plus éloignées de  $t_3$  que  $L$  (voir lemme 3.2.8).

### 3.2.5 Algorithme de construction de la bordure

Nous avons à présent tous les ingrédients nécessaires à l'écriture d'un algorithme qui construit la bordure du graphe d'adjacence d'un pavage de 2D-gone (algorithme 2).

Dans la situation de recherche d'éventail, nous faisons un parcours en largeur d'abord dans  $A_1$ , en commençant en  $t_1$ , et sélectionnons les tuiles les plus proches de  $t_1$  avec degré  $< 4$ . Ceci produit un ensemble de tuiles, dont l'une est  $t_3$  dans la plupart des cas ; nous appelons ces sommets *candidates*.

Dans le cas général, soit il n'y a qu'un candidat, et c'est  $t_3$ , soit il y en a plusieurs, et celui de degré minimal est  $t_3$ .

L'étude précédente isole quelques cas particuliers :

- il peut n'y avoir qu'un candidat qui n'est pas  $t_3$  (voir lemme 3.2.7). C'est le cas de la figure 3.17, et le candidat est  $t_L$ . Alors il existe une

- tuile adjacente à la fois à  $t_2$  et au successeur de  $t_1$  sur le chemin de  $t_1$  à  $t_L$ . On peut alors effectuer un autre parcours en largeur d'abord dans  $A_1 \setminus L$ , car  $L$  est le chemin de  $t_1$  à  $t_L$ .
- il peut y avoir deux candidats de degré minimal, l'un d'eux étant alors  $t_3$ . Deux cas sont possibles :
    - si l'autre candidat est  $t_{L_p}$ , alors on est dans le cas de la figure 3.17 (après le parcours dans  $A_1 \setminus L$ ). Alors il existe un chemin de longueur 2 de  $t_{L_p}$  à  $t_L$ , ce qui permet de retrouver  $t_3$ . Ceci est également le cas particulier du lemme 3.2.9, et le candidat à exclure est celui qui est à distance 2 de  $A_2$ .
    - dans l'autre cas, le candidat est  $t_L$ , et on est dans le cas de la figure 3.18. Alors il est possible de retrouver  $t_3$  dans l'arbre de recherche induit par le parcours en largeur d'abord. Il suffit de commencer en  $t_1$  et de choisir à chaque pas le successeur de degré 3 (c'est-à-dire celui qui a lui-même 2 successeurs). Des deux feuilles obtenues, l'une a degré  $< 4$ , et c'est  $t_3$ .

Ces remarques conduisent à la procédure suivante :

1. si  $t_3$  et  $t_1$  sont adjacents, alors le résultat est évident
2. si  $t_1$  et  $t_2$  sont adjacents, et que  $t_1$  a degré 2, alors  $t_2 \in L$ . On effectue alors une recherche en largeur pour déterminer  $X_{min} = \{t \in A_1, \deg(t) < 4, \text{dist}(t, t_1) \text{ minimal}\}$ . Nous avons alors les alternatives suivantes :
  - (a)  $X_{min}$  est réduit à un unique élément, et c'est  $t_3$
  - (b)  $X_{min}$  a deux éléments. Alors,  $L$  et  $L_p$  sont parallèles, et le lemme 3.2.9 implique qu'il existe un unique  $t \in X_{min}$  tel que  $\text{dist}(t, A_2) \geq 3$ . Celui-ci est  $t_3$ .
3. dans les autres cas,  $t_2 \in T^+$ . Nous effectuons un parcours en largeur pour trouver  $X_{min} = \{t \in A_1, \deg(t) < 4, \text{dist}(t, t_1) \text{ minimal}\}$ . Nous avons les alternatives suivantes :
  - (a)  $X_{min}$  a un unique élément  $t$ . Nous effectuons un test pour savoir si cet élément est  $t_3$ . Soit  $t_{\text{test}}$  le premier sommet sur le plus court chemin de  $t_1$  à  $t$  trouvé lors du parcours en largeur.
    - i. si  $\exists t' \neq t_1$  tel que  $t'$  est adjacent à  $t_2$  et à  $t_{\text{test}}$ , alors  $t$  n'est pas  $t_3$ , et nous sommes dans le cas de la figure 3.18. Nous effectuons un nouveau parcours en largeur pour trouver  $X_{min2} = \{t \in A_1 \setminus L, \deg(t) < 4, \text{dist}(t, t_1) \text{ minimal}\}$ . Alors  $X_{min2}$  a deux éléments. L'un d'entre eux est à distance 2 de  $t$ , l'autre est  $t_3$ .
    - ii. sinon,  $t = t_3$ .
  - (b)  $X_{min}$  a deux éléments. Alors  $X_{min} = \{t_3, t_L\}$ , et  $L, L'$  et  $L_p$  sont parallèles. Nous effectuons un test pour reconnaître  $t_3$ . Soit  $t$  une



tuile de  $X_{\min}$  et  $t_{\text{test}}$  la première tuile sur le plus court chemin de  $t_1$  à  $t$  trouvé précédemment. S'il existe une tuile de  $A_- \cup A_2$  adjacente à  $t_{\text{test}}$ , alors  $t = t_L$ , sinon  $t = t_3$ .

**Théorème 3.2.10** *Etant donné le graphe d'adjacence d'un pavage de 2D-gone, l'algorithme 2 calcule sa bordure en temps  $O(m \cdot n)$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe, et  $m$  est la somme des multiplicités définissant le 2D-gone.*

**Preuve :** La complexité de l'algorithme glouton est en  $O(m \cdot n)$ , puisqu'il consiste uniquement à parcourir tous les sommets de degré au plus 3 et effectuer des parcours en largeur dans le reste du graphe, où les sommets ont degré 4. En commençant à l'origine, on suit uniquement des sommets à distance 1 tant que possible. Les cas particuliers étant basés sur 1 ou 2 parcours en largeur peuvent également être traités en  $O(m \cdot n)$ , ce qui est la complexité de l'algorithme global.  $\square$

### 3.3 Construction des lignes de de Bruijn

Nous allons à présent montrer que, lorsque la bordure du graphe d'un pavage de 2D-gone  $T$  est connue, alors on peut construire les lignes de de Bruijn de  $T$  en calculant certains plus courts chemins dans le graphe. En effet, la bordure est une connaissance de la succession des tuiles le long du contour du pavage. Ainsi on peut trouver la  $j$ -ème tuile pour tout  $j \in \{1, \dots, 2 \cdot m\}$ , où  $m$  est la somme des multiplicités définissant le 2D-gone. Nous prenons comme convention qu'une tuile ayant deux côtés sur le contour (et qui correspond donc à un sommet de degré 2) est simultanément la  $j$ -ème et la  $(j + 1)$ -ème tuile de la bordure ; de plus la première tuile est l'origine  $v_1$  (ainsi l'origine  $v_2$  est la deuxième ou troisième, suivant le degré de  $v_1$  et la multiplicité  $m_1$ ). De par la construction d'un pavage, on peut aisément vérifier que la  $j$ -ème et la  $(j + m)$ -ème tuile sont extrémités de lignes de la même famille de de Bruijn.

Les deux lemmes suivants montrent qu'en choisissant une tuile  $t$  sur un côté du pavage et en calculant les plus courts chemins vers toutes les tuiles sur côté opposé du pavage, on trouve la ligne de de Bruijn dont  $t$  est extrémité, qui est le chemin de longueur minimale.

Remarquons d'ores et déjà que  $m$  peut être calculé facilement à partir du graphe d'adjacence : on a  $m = 2T_2 + T_3$ , où  $T_2$  est le nombre de tuiles de degré 2 et  $T_3$  le nombre de tuiles de degré 3.

**Lemme 3.3.1** *Soit  $T$  un pavage de 2D-gone,  $t$  et  $t'$  deux tuiles de  $T$ , avec  $t$  sur le côté  $i$  et  $t'$  sur le côté  $i + D$  du 2D-gone. Ceci implique que  $t$  et  $t'$  sont extrémités de lignes de la  $i$ -ème famille. Soit  $L_t$  (respectivement  $L_{t'}$ ) la ligne de la  $i$ -ème famille*

---

**Algorithme 2:** Construction de la bordure du graphe d'adjacence d'un pavage de  $2D$ -gone.

---

**Entrée :**  $G = (V, E, v_1, v_2)$  le graphe avec origines d'un pavage de  $2D$ -gone.

**Sortie :** La bordure de  $G$ ,  $\mathcal{B}(G)$ , sous forme d'une suite de sommets.

**début**

```

    soit  $B$  l'ensemble des sommets de  $V$  de degré  $< 4$ ;
     $t_1 \leftarrow v_2, t_2 \leftarrow v_1$ ;
     $\mathcal{B} \leftarrow$  plus court chemin( $t_2, t_1$ ) à l'exclusion de  $t_1$ ;
    répéter
        si  $\exists t \in B, t \neq t_2, (t_1, t) \in E$  alors
             $t_3 \leftarrow t$ ; // cas 1.  $t_1$  et  $t_3$  sont adjacents
        sinon
            si  $(t_1, t_2) \in E$  et  $\deg(t_1) = 2$  alors
                 $X_{min} = BFS(A_1 \cup A_2, t_1)$ ; // cas 2.  $t_2 \in L$ 
                si  $\text{card}(X_{min}) = 1$  alors
                     $t_3 \leftarrow X_{min}$ ; // case (a)
                sinon
                    soit  $t \in X_{min}, \text{dist}(t, A_2) \geq 3$ ; // cas 2(b)
                     $t_3 \leftarrow t$ ;
            sinon
                 $X_{min} = BFS(A_1, t_1)$ ; // cas 3
                si  $\text{card}(X_{min}) = 1$  alors
                    soit  $t_{test}$  le premier sommet du chemin  $(t_1, X_{min})$ ;
                    // cas 3(a)
                    si  $\exists t' \neq t_1 \in V, (t_{test}, t') \in E, (t_1, t_2) \in E$ 
                    et  $(t_2, t') \in E$  alors
                         $X_{min2} = BFS(A_1 \setminus \text{chemin}(t_1, X_{min}), t_1)$ ;
                        // cas 3(a)i.
                         $t_3 \leftarrow t, t \in X_{min2}, \text{dist}(t, X_{min}) \geq 3$ ;
                    sinon
                         $t_3 \leftarrow X_{min}$ ; // cas 3(a)ii.
                sinon
                    // cas 3(b);
                    soit  $t \in X_{min}$ , et  $t_{test}$  le premier sommet du plus
                    court chemin  $(t_1, t)$ ;
                    soit  $t''$  l'autre élément de  $X_{min}$ ;
                    si  $\exists t \in V, (t, t_{test}) \in E, t \in A_2 \cup A_1$  alors  $t_3 = t''$ 
                    sinon  $t_3 = t$ ;
            ajouter le plus court chemin  $(t_1, t_3)$  (excepté  $t_3$ ) à la fin de  $\mathcal{B}$ ;
             $t_2 \leftarrow t_1, t_1 \leftarrow t_3$ ;
    jusqu'à  $t_3 = v_1$ ;
    retourner( $\mathcal{B}$ );

```

**fin**

---

contenant  $t$  (respectivement  $t'$ ). Soit  $r$  le nombre de lignes de la  $i$ -ème famille qui ne sont pas placées entre  $L_t$  et  $L_{t'}$ . Alors  $\text{dist}(t, t') = m - r - 2$  (où  $m$  est la somme des multiplicités). Voir figure 3.20.

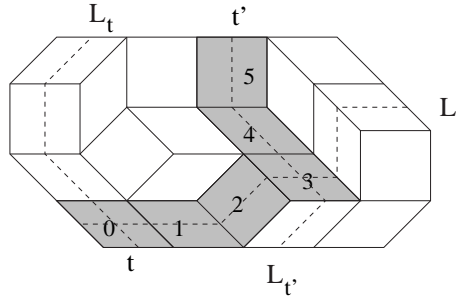


FIG. 3.20 – Le cas général, et les valeurs associées à un chemin de  $t$  à  $t'$ .

**Preuve :** Nous considérons l'ensemble  $\mathbf{B}$  de toutes les lignes de de Bruijn excepté les  $r$  lignes de la  $i$ -ème famille qui ne sont pas entre  $L_t$  et  $L_{t'}$ . Il y a exactement  $m$  lignes de de Bruijn dans le pavage, donc  $m - r$  d'entre elles sont prises en compte. Deux lignes se coupent en chacune des tuiles  $t$  et  $t'$ . Donc dans le pire cas il y a quatre lignes pour lesquelles  $\text{ind}(t, t') = 1/2$ . Toutes les autres lignes doivent être coupées pour aller de  $t$  à  $t'$  donc leurs indices valent 1, et il y a  $m - (r + 4)$  telles lignes. On obtient ainsi  $\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t') = (m - (r + 4)) \times 1 + 4 \times 1/2 = m - r - 2$ , d'où  $\text{dist}(t, t') \geq m - r - 2$ . Par conséquent la longueur du chemin est au moins  $m - r - 2$ .

Soit à présent  $L'$  la ligne de de Bruijn qui coupe  $L_t$  en  $t$ , et considérons le chemin consistant à suivre  $L'$  de  $t$  jusqu'à son intersection avec  $L_{t'}$ , puis à suivre  $L_{t'}$  jusqu'à atteindre  $t'$ . A chaque pas de ce chemin on quitte une ligne de l'ensemble précédent et on en atteint une autre, ce qui implique que ce chemin a pour longueur  $m - r - 2$ . D'où le lemme.  $\square$

**Lemme 3.3.2** Soit  $T$  un pavage,  $t$  et  $t'$  deux tuiles extrémités d'une ligne de de Bruijn  $L$ , et  $t''$  une tuile telle qu'il existe un éventail entre  $t'$  et  $t''$ . Alors  $\text{dist}(t, t') \leq \text{dist}(t, t'')$ . Voir figure 3.21.

**Preuve :** Soit  $(t = t_0, t_1, \dots, t_r = t')$  le chemin induit par  $L$  commençant en  $t$ . Pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i < r$ , soit  $L_i$  la ligne de de Bruijn coupant  $L$  en  $t_i$ , et  $b_i$  la valeur 1 si  $i \neq 0$  et  $b_0 = 1/2$ . Remarquons que  $\text{ind}_{L_i}(t, t'') = b_i$  si  $t''$  n'est pas sur  $L_i$  et  $\text{ind}_{L_i}(t, t'') = b_i - 1/2$  si  $t''$  est sur  $L_i$ . Alors, en choisissant pour  $\mathbf{B}$  l'ensemble des lignes  $L_i$ , nous obtenons  $\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t'') \geq \sum_{i=0}^r b_i - 1$ , car  $t''$  est sur au plus deux lignes  $L_i$ . Ainsi,  $\text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t'') \geq r - 1/2$ . De plus,  $\text{dist}(t, t'') \geq \text{ind}_{\mathbf{B}}(t, t'') \geq \text{dist}(t, t') - 1/2$ , ce qui donne le résultat,  $\text{dist}(t, t'')$  étant un entier.  $\square$

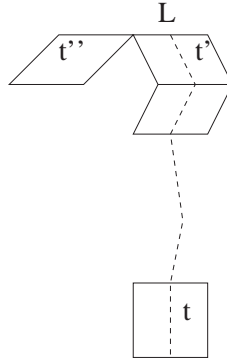


FIG. 3.21 – La position des tuiles correspondant au lemme 3.3.2.

Nous avons alors un critère pour retrouver les extrémités de chaque ligne de de Bruijn. En prenant une tuile  $t_1$  et la tuile  $t_2$  placée sur le côté opposé à  $t_1$  (c'est-à-dire que  $t_1$  est à la  $\alpha$ -ème position dans la bordure, et  $t_2$  à la  $(\alpha + m)$ -ème position,  $m$  étant la somme des multiplicités), on a deux extrémités de lignes d'une même famille. Si de plus on sait que la  $(\alpha - 1)$ -ème position n'est pas sur le même côté que la  $\alpha$ -ème, alors on peut calculer le plus court chemin de  $t_1$  à  $t_2$ .

Nous considérons la tuile  $t_3$  placée après  $t_2$  dans la bordure. Si  $t_3$  est dans la même famille que  $t_2$ , alors  $\text{dist}(t_1, t_3) = \text{dist}(t_1, t_2) - 1$ . Dans l'autre cas,  $\text{dist}(t_1, t_3) \geq \text{dist}(t_1, t_2)$ . Ceci fournit un critère algorithmique pour reconnaître les lignes de de Bruijn.

Dans cette situation, l'algorithme construit les lignes de de Bruijn comme suit :

Il calcule tout d'abord  $\text{dist}(t_1, t_2)$ . Puis, il se déplace de  $t_2$  vers son successeur dans la bordure, disons  $t_3$ , et calcule  $\text{dist}(t_1, t_3)$ . Si  $\text{dist}(t_1, t_3) = \text{dist}(t_1, t_2) - 1$ , alors on est toujours dans la même famille de de Bruijn. On continue ainsi jusqu'à ce que  $\text{dist}(t_1, t_i) \geq \text{dist}(t_1, t_{i-1})$ , où  $t_i$  est le  $(i - 2)$ -ème successeur de  $t_2$  dans la bordure. A ce point, on sait que  $t_2, \dots, t_{i-1}$  sont les extrémités de lignes de la même famille que  $t_1$ . Alors, les lignes de de Bruijn sont les plus courts chemins entre successivement  $(t_1, t_{i-1})$ ,  $(t'_1, t_{i-2}), \dots, (t_1^{(i-3)}, t_2)$ , où les  $t'_i$  sont les successeurs de  $t_1$  sur la bordure.

Ceci permet de calculer une famille de de Bruijn en entier, et en réitérant le processus pour chaque famille de de Bruijn, on obtient le pavage en entier. Ces remarques conduisent directement au théorème suivant.

**Théorème 3.3.3** *Etant donné le graphe avec origines d'un pavage de zonotope de dimension 2  $T$  et sa bordure, l'algorithme 3 calcule le graphe de de Bruijn de  $T$  en temps  $O(m.n)$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe, et  $m$  la somme des*

*multiplicités définissant le zonotope.*

En partant du graphe avec origines d'un pavage de  $2D$ -gone  $T$ , il est clair que l'on peut construire un pavage équivalent à  $T$  en calculant la bordure du graphe par l'algorithme 2, puis le graphe de de Bruijn par l'algorithme 3, et obtenir finalement le pavage par l'algorithme 1. Nous pouvons donc combiner les théorèmes 3.1.1, 3.2.10 et 3.3.3 pour obtenir :

**Théorème 3.3.4** *Etant donné le graphe avec origines d'un pavage de  $2D$ -gone  $T$ , il existe un algorithme qui construit un pavage équivalent à  $T$  en temps  $O(m.n)$ , où  $n$  est le nombre de tuiles et  $m$  la somme des multiplicités des vecteurs définissant le  $2D$ -gone.*

Ce résultat non seulement donne un moyen simple et efficace de coder et manipuler les pavages de  $2D$ -gones, mais également clarifie la relation existant entre le graphe d'adjacence avec origines et le pavage lui-même. En particulier, il prouve que, bien qu'il n'y ait pas de bijection entre les graphes d'adjacence et les pavages, le graphe d'adjacence contient presque toute l'information sur le pavage.

---

**Algorithme 3:** Construction du graphe de de Bruijn d'un pavage de  $2D$ -gone à partir de son graphe avec origines.

---

**Entrée :**  $G = (V, E, v_1, v_2)$  le graphe avec origines d'un pavage de  $2D$ -gone  $T$  et  $\mathcal{B}(G)$  sa bordure.

**Sortie :**  $G' = (V, E, \lambda, \nu)$ , le graphe de de Bruijn de  $T$ .

**début**

```

i ← 1; //calcul de  $m = \text{taille}(B)/2$ 
pour chaque  $x \in \mathcal{B}(G)$  faire
    si  $\deg(x) < 4$  alors
         $B[i] \leftarrow x, i \leftarrow i + 1;$ 
        si  $\deg(x) = 2$  alors
             $B[i] \leftarrow x, i \leftarrow i + 1;$ 
     $\alpha \leftarrow 1;$ 
    répéter
         $\beta \leftarrow \alpha + \lfloor \text{taille}(B)/2 \rfloor;$ 
        //  $\alpha, \beta$  : indices des extrémités
         $\text{dist}[0] \leftarrow \text{distance}(B[\alpha], B[\beta]);$ 
         $\text{currentpath} \leftarrow \text{plus court chemin}(B[\alpha], B[\beta]);$ 
         $\text{endfamily} \leftarrow \text{faux};$  //currentpath contient le
        dernier chemin calculé
         $l \leftarrow 0;$  // boucle pour calculer la taille  $l$ 
        d'une famille de de Bruijn
        tant que  $\text{endfamily}=\text{faux}$  et  $\beta + l < \text{taille}(B)$  faire
             $l \leftarrow l + 1;$ 
             $\text{tmp} \leftarrow \text{plus court chemin}(B[\alpha], B[\beta + l]);$ 
             $\text{dist}[l] \leftarrow \text{distance}(B[\alpha], B[\beta + l]);$ 
            si  $\text{dist}[l] < \text{dist}[l - 1]$  alors
                 $\text{currentpath} \leftarrow \text{tmp}$ 
            sinon
                 $\text{endfamily} \leftarrow \text{vrai}$ 
        //calcul des lignes de la famille courante
        pour chaque sommet  $v$  de  $\text{currentpath}$  faire
             $\lambda(v) \leftarrow \lambda(v) \cup \{\alpha\};$ 
         $l \leftarrow l - 2; \alpha \leftarrow \alpha + 1;$ 
        tant que  $l \geq 0$  faire
            construire le plus court chemin entre  $B[\alpha]$  et  $B[\beta + l];$ 
            pour chaque sommet  $v$  du chemin faire
                 $\lambda(v) \leftarrow \lambda(v) \cup \{\alpha\};$ 
             $l \leftarrow l - 1; \alpha \leftarrow \alpha + 1;$ 
    jusqu'à  $\alpha > \lfloor \text{taille}(B)/2 \rfloor;$ 
    retourner  $(V, E, \lambda, v_1);$ 

```

**fin**

---



## Chapitre 4

# Décomposition d'un pavage

L'étude va se tourner maintenant sur la structure d'un pavage en toute dimension, et certaines remarques nous amèneront par la suite à considérer les structururations possibles de l'ensemble des pavages d'un zonotope.

Nous présentons dans un premier temps un nouveau codage d'un pavage, basé cette fois sur l'opération de suppression. Nous verrons par la suite comment les caractéristiques de ce codage permettent d'envisager un autre type de représentation indépendante de la dimension.

L'opération de suppression est une autre vision d'un outil classique en théorie des matroïdes orientés (voir par exemple [CF93, BVS<sup>+</sup>99, BdO00, FF02]). Le lien entre pavages de zonotopes et matroïdes orientés a été établi en 1989 par Jochen Bohne et Andreas Dress (pour plus de détails, voir par exemple [RGZ94]).

### 4.1 Suppressions

Soit  $T$  un pavage d'un zonotope  $Z$ , et  $S_{\{v_i, j\}}$  une section de de Bruijn de  $T$ . On peut alors supprimer les tuiles de  $S_{\{v_i, j\}}$  et translater les tuiles de  $T_{\{v_i, j\}}^+$  par le vecteur  $-v_i$ . Pour  $D > d$ , la configuration obtenue est un pavage de  $Z' = (V, M')$  où  $M'$  est défini par  $m'_i = m_i - 1$  et  $\forall k \neq i, m'_k = m_k$  (dans le cas où  $m_i = 1$ ,  $Z' = (V', M')$ , où  $V'$  et  $M'$  sont obtenus en retirant la  $i$ -ème composante respectivement de  $V$  et  $M$ ). Cette opération est appelée *suppression*.

On notera  $D_{\{v_i, j\}}(T)$  le pavage résultant de la suppression de  $S_{\{v_i, j\}}$ , et pour toute tuile  $t$  de  $T$  on pose  $D_{\{v_i, j\}}(t) = t$  si  $t \in T_{\{v_i, j\}}^-$  et  $D_{\{v_i, j\}}(t) = t - v_i$  si  $t \in T_{\{v_i, j\}}^+$ .

Pour la consistance, les sections de de Bruijn de  $D_{\{v_i, j\}}(T)$  dirigées suivant  $v_i$  sont supposées numérotées  $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m_i$ . De cette façon,  $t$  est dans la même section de de Bruijn avant et après suppression. Nous avons aussi besoin de cette convention pour la proposition suivante, dans



le cas où  $v_i = v_k$ , et qui établit la commutativité des suppressions.

**Proposition 4.1.1 (commutativité des suppressions)** Soient  $T$  un pavage d'un zonotope  $Z$ , et deux suppressions  $D_{\{v_i, j\}}$  et  $D_{\{v_k, l\}}$ . Alors on a  $D_{\{v_i, j\}}(D_{\{v_k, l\}}(T)) = D_{\{v_k, l\}}(D_{\{v_i, j\}}(T))$  (voir figure 4.1).

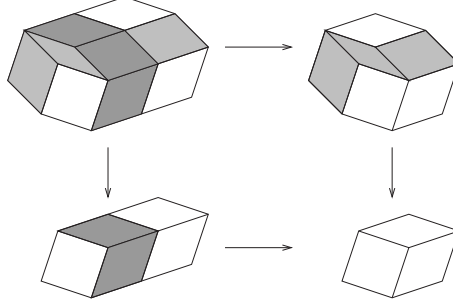


FIG. 4.1 – La commutativité de deux suppressions

**Preuve :** Le pavage  $T$  peut être partitionné en les cinq parties ci-dessous :

- $T_{\{v_i, j\}}^- \cap T_{\{v_k, l\}}^-$  : les tuiles de cette partie ne sont pas déplacées pendant les deux suppressions, quel qu'en soit l'ordre
- $T_{\{v_i, j\}}^+ \cap T_{\{v_k, l\}}^-$  : les tuiles de cette partie sont translatées de  $-v_i$  quel que soit l'ordre des suppressions
- $T_{\{v_i, j\}}^- \cap T_{\{v_k, l\}}^+$  : les tuiles de cette partie sont translatées de  $-v_k$  quel que soit l'ordre des suppressions
- $T_{\{v_i, j\}}^+ \cap T_{\{v_k, l\}}^+$  : les tuiles de cette partie sont translatées de  $-(v_i + v_k)$  quel que soit l'ordre des suppressions
- $S_{\{v_i, j\}} \cup S_{\{v_k, l\}}$  : les tuiles de cette partie sont supprimées quel que soit l'ordre des suppressions.

Donc l'ordre des suppressions ne change rien pour le résultat, d'où la commutativité.  $\square$

$T$  étant supposé de taille  $s$ , un pavage obtenu de  $T$  par une suite de  $p$  suppressions est appelé un  $(s - p)$ -mineur de  $T$ . Les paires  $\{v_i, j\}$  peuvent être totalement ordonnées (lexicographiquement, par exemple). Ainsi, les ensembles de  $p$  éléments de type  $\{v_i, j\}$ , c'est-à-dire les ensembles de la forme  $\{\{v_{i_1}, j_1\}, \{v_{i_2}, j_2\}, \dots, \{v_{i_p}, j_p\}\}$  peuvent être totalement ordonnés. Donc les  $(s - p)$ -mineurs peuvent également être totalement ordonnés. La suite des  $(s - p)$ -mineurs de  $T$  est donnée par cet ordre.

**Proposition 4.1.2** Pour  $s \geq d + 2$ , tout pavage est déterminé par la suite de ses  $(d - 1)$ -mineurs. Voir figure 4.2

**Preuve :** Soient  $Z$  un zonotope de taille  $s$  et  $T$  un de ses pavages. Remarquons qu'il est possible de calculer la suite des  $(d - 2)$ -mineurs de  $T$  à partir de ses  $(d - 1)$ -mineurs.

Soient  $\{v_i, j\}$  et  $\{v_k, l\}$  deux paires distinctes,  $D_1$  et  $D_2$  les suppressions qui leur sont respectivement associées, et  $D_{1,2}$  la double suppression. Pour toute tuile  $t'$  de  $D_{1,2}(T)$  on peut déterminer les tuiles  $t_1$  telle que  $t_1 \in D_1(T)$  et  $D_2(t_1) = t'$ , et  $t_2$  telle que  $t_2 \in D_2(T)$  et  $D_1(t_2) = t'$ . Il existe une paire  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $\{0, 1\}^2$  telle que  $t' = t_1 - \varepsilon_1 v_k$  et  $t' = t_2 - \varepsilon_2 v_i$ .

Soit  $t_0$  la tuile telle que  $t_1 = D_1(t_0)$ , La commutativité induit que l'on a aussi  $t_2 = D_2(t_0)$ , de façon à ce que  $t' = D_2(D_1(t_0))$ . On a nécessairement  $t' = t_0 - \varepsilon_2 v_i - \varepsilon_1 v_k$ . En effet, il existe donc une paire  $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$  de  $\{0, 1\}^2$  telle que  $t_1 = t_0 - \varepsilon_3 v_i$  et  $t_2 = t_0 - \varepsilon_4 v_k$ . Donc  $t' = t_0 - \varepsilon_3 v_i - \varepsilon_1 v_k$  et  $t' = t_0 - \varepsilon_4 v_k - \varepsilon_2 v_i$ . Ceci implique que  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_4 = \varepsilon_1$  (ceci est évident pour  $v_j \neq v_k$ . Pour  $v_j = v_k$ , on obtient ce résultat par une étude des trois cas possibles de position de  $t_0$  par rapport aux sections de Bruijn considérées).

En d'autres termes, on peut calculer  $t_0$  à partir du triplet  $(t', t_1, t_2)$ . Ceci donne le résultat, car pour toute tuile  $t_0$  de  $T$ , il existe deux paires distinctes  $\{v_i, j\}$  et  $\{v_{i'}, j'\}$  telles que  $t_0$  ne soit pas dans  $S_{\{v_i, j\}} \cup S_{\{v_{i'}, j'\}}$  (ce qui provient de l'hypothèse  $s \geq d + 2$ ). On peut donc retrouver toutes les tuiles de  $T$ .  $\square$

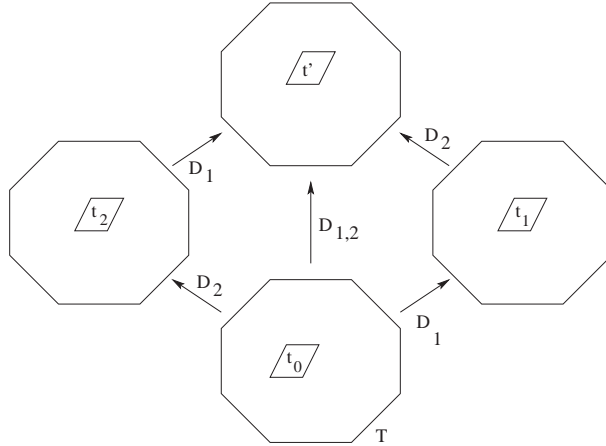


FIG. 4.2 – Preuve de la proposition 4.1.2, calcul des positions de  $t_0$

Remarquons que ce résultat est faux pour  $s = d + 1$ . Dans ce cas, chaque  $d$ -mineur est réduit à une tuile, donc toutes les informations sur l'arrangement de tuiles sont perdues.

En itérant la preuve pour les  $(s - 1)$ -suppressions, on obtient le résultat suivant comme corollaire de la proposition 4.1.2 (voir figure 4.3).

**Corollaire 4.1.3** Soit  $s'$  un entier tel que  $d + 1 \leq s' \leq s$ . En supposant  $s \geq$

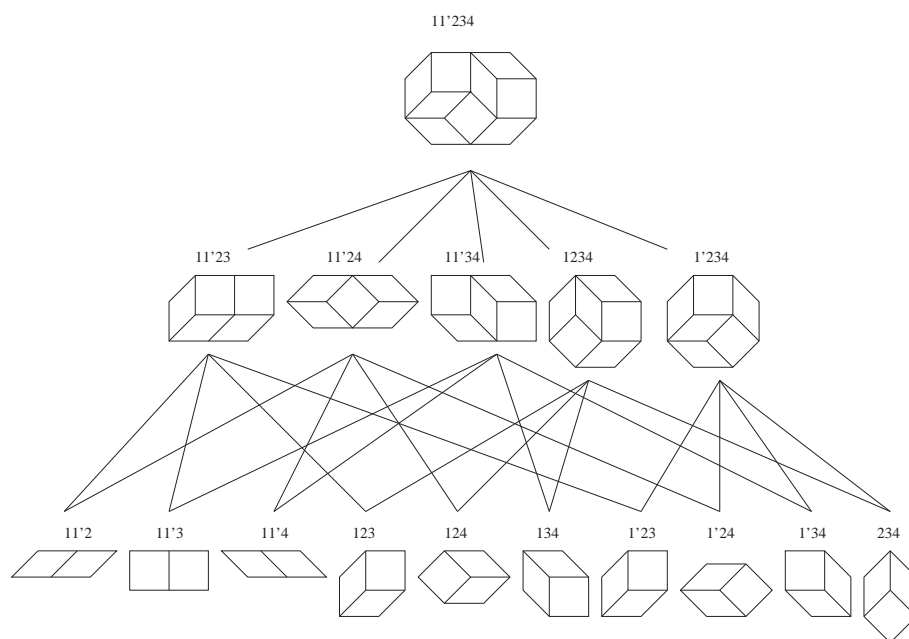


FIG. 4.3 – L'ensemble des mineurs d'un pavage de taille 4 avec 1 vecteur de multiplicité 2.

$d + 2$ , tout pavage  $T$  d'un  $s$ -zonotope est défini par la suite de ses  $s'$ -mineurs. En particulier, ce résultat s'applique pour les  $(d + 1)$ -mineurs.

**Preuve :** directe, par induction de la preuve de la proposition précédente.  $\square$

## 4.2 Codage basé sur les suppressions

Notons qu'il existe deux types de  $(d + 1)$ -mineurs : ceux de codimension 0 (un des vecteurs est dupliqué), dits *bloqués*, et ceux de codimension 1, dits *libres*, qui sont des pavages de zonotopes unitaires. Seuls les mineurs libres contiennent de l'information nécessaire pour reconstruire le pavage  $T$ . Cette information peut être réduite à un unique bit codant le fait que le mineur est en position haute ou basse dans  $T$ . Ceci donne un codage des pavages de zonotopes par un mot sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  de longueur  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} \leq D} m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_{d+1}}$  (voir Figure 4.4).

On peut pour obtenir cela ordonner les mineurs par ordre lexicographique des indices des vecteurs définissant chaque mineur.

Il est clair que tout mot sur  $\{0, 1\}$  (de taille correcte) ne code pas un pavage, on a des interactions entre mineurs, qui conduisent à des problèmes

d'incompatibilité de position de mineurs dans un même pavage. Ceci amènera au théorème de reconstruction, qui caractérise les mots effectivement codant, en testant la compatibilité des positions des mineurs, donc des bits correspondant.

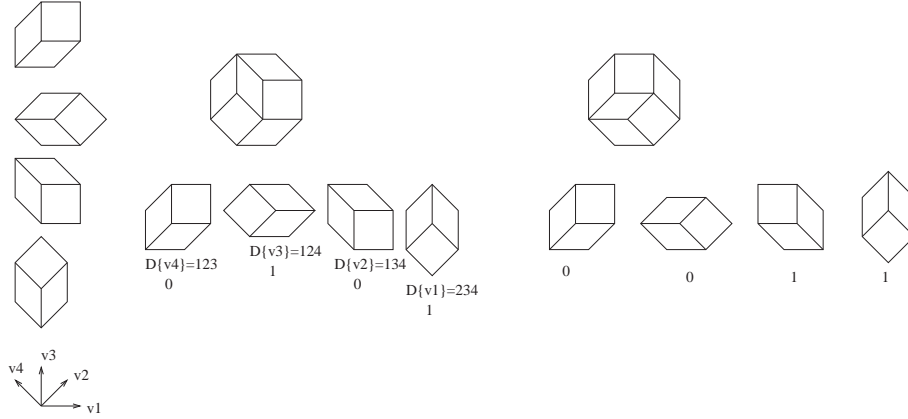


FIG. 4.4 – Gauche : les positions basses ; Droite : les mots codant deux pavages

### 4.3 Théorème de reconstruction

Nous nous intéressons au problème suivant : étant donné un zonotope  $Z$  et une suite de  $(d + 1)$ -pavages (avec une cardinalité et des vecteurs bien choisis), existe-t-il un pavage  $T$  de  $Z$  dont la suite donnée est la suite des  $(d + 1)$ -mineurs ? Autrement dit, existe-t-il un pavage  $T$  codé par la suite de  $(d + 1)$ -mineurs donnée ?

Ce problème peut bien sûr être résolu en reconstruisant les  $(d + 2)$ -mineurs potentiels (c'est-à-dire en supposant que l'on est dans le cas d'un mot codant un pavage), puis les  $(d + 3)$ -mineurs, et ainsi de suite. S'il y a contradiction pendant le processus, la reconstruction est impossible, sinon on obtient le pavage cherché. Cependant, la proposition suivante indique que la première étape du processus est suffisante pour obtenir la réponse.

**Proposition 4.3.1** *Soit  $(Z_m)_m$  une suite de pavages de codimension 1. Il existe un pavage  $T$  d'un zonotope dont la suite de  $(d + 1)$ -mineurs est exactement  $(Z_m)_m$  si et seulement si les  $(d + 2)$ -mineurs sont compatibles, c'est-à-dire qu'ils peuvent être reconstruits correctement.*

**Preuve :** Nous faisons la preuve par induction sur la taille  $s$  du zonotope. Le cas  $s = d + 2$  est évident.

Soit  $s > d + 2$ . Considérons la sous-suite formée des  $(d + 1)$ -pavages où les tuiles de la section de de Bruijn (potentielle)  $\{v_D, m_D\}$  n'apparaissent pas (ceci correspond à l'hypothèse que la suppression  $D_{\{v_D, m_D\}}$  a été faite). Cette suite est, par hypothèse, la suite de  $(d + 1)$ -mineurs d'un pavage  $T'$  de taille  $s - 1$ .

De plus, pour toute tuile  $t$  de  $T'$ , il existe un  $(d + 1)$ -pavage  $T_t$  contenant  $t$  ainsi que  $d$  tuiles de la section de de Bruijn  $\{v_D, m_D\}$ . Donc on peut attribuer un signe  $+$  ou  $-$  à  $t$ , qui correspond à sa position par rapport à  $S_{\{v_D, m_D\}}$  (on assigne  $+$  si la hauteur suivant  $D$  de  $t$  vaut 1,  $-$  si elle vaut 0). Soient donc  $T'^+$  l'ensemble des tuiles de  $T'$  marquées  $+$  et  $T'^-$  l'ensemble des tuiles de  $T'$  marquées  $-$  (voir figure 4.5).

Nous considérons à présent une droite  $l$  de vecteur directeur  $v_D$ . Nous démontrons le résultat suivant : si on suit  $l$  dans l'orientation de  $v_D$ , alors on rencontre d'abord des tuiles marquées  $-$ , puis des tuiles marquées  $+$ . Ceci signifie que  $T'^+$  et  $T'^-$  sont convexes suivant  $v_D$ , donc que la section de de Bruijn  $\{v_D, m_D\}$  peut être insérée correctement dans  $T'$ , pour résulter en le pavage  $T$  cherché (voir figure 4.6).

Deux cas sont possibles :

- $l$  ne rencontre dans le pavage aucune face de dimension inférieure à  $d - 1$ . Soient alors deux tuiles  $t_1$  et  $t_2$  de  $T'$ , qui ont une facette en commun, et telles que  $t_2$  suit  $t_1$  dans la suite de tuiles traversées par  $l$  dans le sens de  $v_D$ . Alors il existe un  $(d + 2)$ -mineur  $T_{d+2}$  contenant des tuiles de  $\{v_D, m_D\}$  ainsi que  $t_1$  et  $t_2$ . Il y a 4 attributions possibles de signes  $+$  et  $-$  aux tuiles  $t_1$  et  $t_2$ . Alors l'attribution  $+$  pour  $t_1$  et  $-$  pour  $t_2$  est impossible, sinon la tuile de type  $\{\tau\} \cup \{v_D\}$ , où  $\tau$  désigne l'ensemble des vecteurs communs à  $t_1$  et  $t_2$ , ne peut être placée dans le mineur  $T_{d+2}$  (voir Figure 4.5).

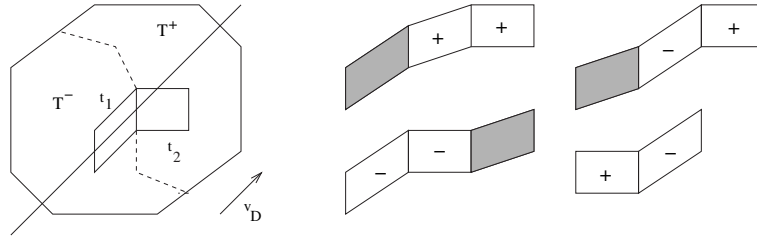
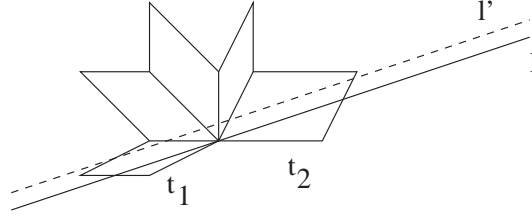


FIG. 4.5 – Les attributions de signes pour 3 tuiles. Remarquons l'attribution interdite

- $l$  coupe une face  $f$  de dimension inférieure à  $d - 1$ . Alors il existe deux tuiles  $t_1$  et  $t_2$  satisfaisant aux hypothèses du cas précédent, mais ne partageant que la face  $f$ . Il existe une ligne  $l'$ , proche de  $l$ , qui satisfait aux hypothèses du cas précédent, et qui traverse  $t_1$  et  $t_2$  (cependant  $t_1$  et  $t_2$  ne sont pas nécessairement consécutives sur  $l'$ , voir figure). Alors l'attribution  $+$  pour  $t_1$  et  $-$  pour  $t_2$  est impossible.

FIG. 4.6 – La ligne  $l$  coupant un sommet, et sa ligne dérivée  $l'$ 

Ainsi  $T'^{+}$  et  $T'^{-}$  sont cohérents (convexes) par rapport à  $\{v_D, m_D\}$ , ce qui permet de translater  $T'^{+}$  de  $v_D$ , et d'insérer la section de de Bruijn  $S_{\{v_D, m_D\}}$ . Le pavage obtenu  $T$ , tel que  $T'^{+} = T_{\{v_D, m_D\}}^{+}$  et  $T'^{-} = T_{\{v_D, m_D\}}^{-}$ , est le pavage cherché, ce qui termine la preuve.  $\square$

Le théorème de reconstruction peut être représenté par la figure 4.7. L'idée est que l'ensemble des mineurs est compatibles (donc code un pavage) si la première étape du processus peut être effectuée sans incompatibilité.

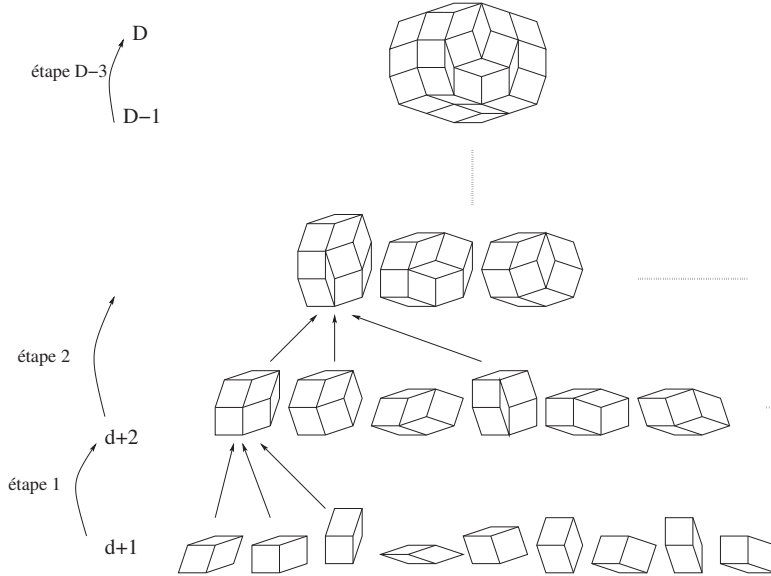


FIG. 4.7 – Schéma d'un processus de reconstruction.

De ce chapitre il résulte que les pavages de zonotopes sont déterminés par leurs mineurs de taille  $d + 1$ . Nous allons voir dans ce qui suit les propriétés d'une représentation des pavages par leurs mineurs dans le cas particulier de la codimension 2.

Nous obtenons une caractérisation des mots codant effectivement un pavage en toute dimension. Cependant, pour mieux comprendre la structure de l'ensemble des pavages et étudier plus précisément ses caractéristiques, on doit trouver une représentation qui met en exergue les contraintes entre les  $(d+1)$ -mineurs. Ceci est fait dans le chapitre suivant pour le cas de codimension 1, et dans le chapitre 6 pour la codimension 2. Nous verrons par la suite les difficultés liées aux codimensions supérieures.

## Chapitre 5

# Structure de l'espace des pavages en codimension 1

Nous présentons dans ce chapitre les résultats permettant de structurer l'espace des pavages dans le cas de codimension 1. Dans le plan, ceci correspond à l'exemple désormais classique des pavages d'hexagones par 3 types de losanges sur la grille triangulaire. Ceux-ci se représentent de façon naturelle par des empilements de cubes, ce qui amène à une structure de treillis distributif de manière directe. Nous allons voir cependant comment cette représentation se généralise en dimensions supérieures.

Ce travail généralise les résultats classiques en dimension 2 [Rém03]. Il étend et replace dans un cadre plus général les résultats de [LMN01, BL03].

### 5.1 Définitions structurelles

Nous rappelons dans cette partie les définitions liées à la théorie des ordres et aux treillis. Nous renvoyons le lecteur à [DP90] pour plus de précisions.

**Définition 11 (ensemble ordonné)** *Un ensemble ordonné est un couple  $P = (E, \leq)$  où  $E$  est un ensemble et  $\leq$  un ordre sur  $E$ , c'est-à-dire une relation binaire définie sur  $E$ , qui est réflexive, antisymétrique et transitive. On note indifféremment  $x \in E$  ou  $x \in P$ .*

Notons que dans le cas général, un ordre peut comporter des éléments *incomparables*, c'est-à-dire des éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  tels que l'on n'ait ni  $x \leq y$  ni  $y \leq x$ . S'il n'y a aucun couple d'éléments incomparables, l'ordre est *total*. C'est par exemple le cas de l'ordre naturel sur les entiers.

**Définition 12 (relation de couverture)** *Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $P$ . On dit que  $y$  couvre  $x$ , et on note  $x \prec y$ , le fait que  $x < y$  et qu'il n'existe pas*



d'élément  $z \in P$  tel que  $x < z < y$ . Cette relation sur  $P$  est antisymétrique et transitive.

Notons que l'ordre  $\leq$  de  $P$  est obtenu en effectuant la cloture transitive et réflexive de  $\prec$ . Tout ordre est ainsi représentable par sa relation de couverture. Cette représentation s'appelle le *diagramme de Hasse*. Le diagramme de Hasse représente chaque élément de l'ensemble par un point de sorte que  $x$  est au-dessous de  $y$  si  $x < y$  et de plus  $x$  et  $y$  sont liés par un segment si  $x \prec y$ . Voir figure 5.1.

**Définition 13 (infimum, supremum, treillis)** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un ordre  $P$ . Si l'ensemble des éléments plus petits que  $x$  et  $y$  a un unique élément maximal, on appelle cet élément l'infimum de  $x$  et  $y$ , et on le note  $x \wedge y$ . De façon similaire, on définit, s'il existe, le supremum de  $x$  et  $y$  comme l'unique élément minimal de l'ensemble des éléments plus grands que  $x$  et  $y$ , que l'on note  $x \vee y$ . Si dans  $P$  tout couple  $(x, y)$  a un supremum et un infimum, alors  $P$  est un treillis.

**Définition 14 (treillis distributif)** Un treillis  $L$  est distributif si chacune des opérations  $\vee$  et  $\wedge$  sont distributives l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire :

- $\forall x, y, z \in L \ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $\forall x, y, z \in L \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Un exemple classique de treillis distributif est le treillis des sous-ensembles d'un ensemble ordonné par inclusion. Voir figure 5.1.

La propriété de distributivité induit de nombreux résultats forts (voir par exemple [Ber99, Lat00, Lat01]).

## 5.2 Fonctions de hauteur

Nous reprenons ici les définitions du chapitre 2, et explicitons les propriétés des pavages de codimension 1 en parallèle avec celles des fonctions de hauteur associées. Dans tout ce chapitre, nous considérerons des hauteurs canoniques.

### 5.2.1 Réduction à la grille

Une première façon d'aborder le problème, et la plus classique, est de trouver une représentation telle que les points du pavage sont tous situés sur la grille carrée de dimension  $d$ . Ce cas est notamment étudié dans [BL03].

On considère une suite de vecteurs  $(v_1, \dots, v_d, v_{d+1})$  non dégénérée. On a une égalité du type  $v_{d+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d$ , puisque par définition l'ensemble des vecteurs est tel que tout sous-ensemble de taille  $d$  est une base

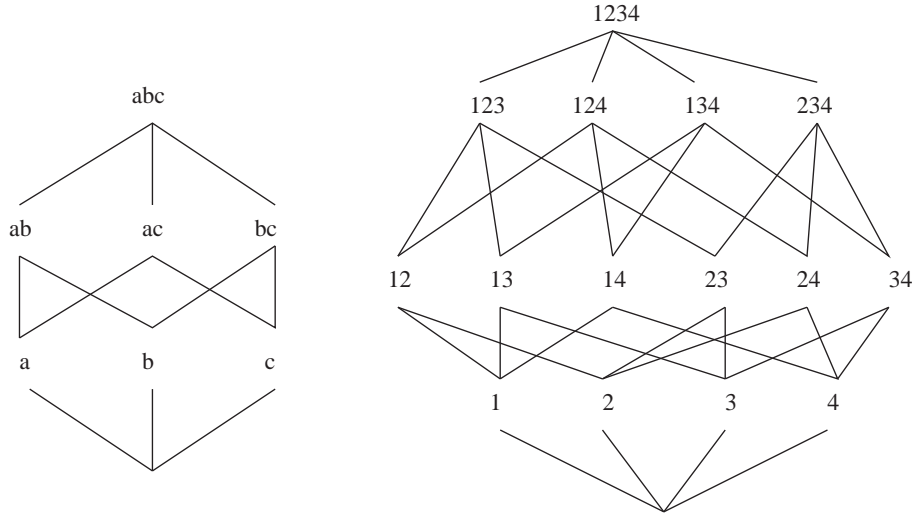


FIG. 5.1 – Diagrammes de Hasse du treillis des sous-ensembles de  $\{a, b, c\}$  et de  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

de  $\mathbb{R}^d$ .

En posant  $e_i = -\alpha_i v_i$  et  $e_{d+1} = v_{d+1}$ , on obtient l'égalité  $e_{d+1} = -e_1 - e_2 \dots - e_d$ . Les transformations élémentaires définies au chapitre 2 nous permettent d'étudier seulement les pavages construits à partir de la suite de vecteurs  $(e_1, \dots, e_{d+1})$ .

Etant donné un hypercube de dimension  $d$  défini par  $e_1, \dots, e_d$ , le vecteur  $e_{d+1}$  correspond ici à la diagonale reliant le point  $e_1 + e_2 + \dots + e_d$  et l'origine de l'hypercube (voir figure 5.2 pour un exemple en dimension 3).

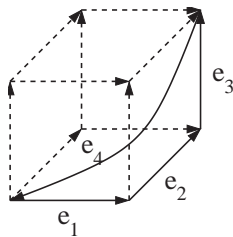


FIG. 5.2 – Exemple d'hypercube en dimension  $d$ , et un exemple de cycle en trait plein.

Pour la suite, nous nous concentrons sur ce cas précis. De plus, on se place dans le cas d'un support  $S$  est homéomorphe à un disque. Le support étant simplement connexe, la notion de hauteur s'étend naturellement.

Nous considérons le réseau induit par ces vecteurs. Les points du réseau sont les points de  $\mathbb{Z}^d$ , et deux points  $v_1$  et  $v_2$  sont reliés par une arête si on peut écrire  $v_1 = v_2 + e_i$  ou  $v_2 = v_1 + e_i$  pour un  $i$  donné.

Avec les définitions données, on remarque que tout rhomboèdre a une unique arête liant deux sommets opposés. Réciproquement, à toute arête du réseau, on peut associer un unique rhomboèdre traversée par cette arête. Dans ce cas de figure, on dit de qu'une telle arête est l'arc centrale du rhomboèdre.

On utilise la hauteur principale canonique par rapport aux  $\{e_i\}_{i=1,\dots,d+1}$ .

Nous rappelons quelques propriétés fondamentales énoncées au chapitre 2 :

La hauteur d'un point du contour du support ne dépend pas du pavage. La hauteur d'un point intérieur au pavage est bien définie, la simple connexité du support assure cette propriété.

### Rhomboèdre et hauteur

Un rhomboèdre dans ce cas est construit sur  $d$  vecteurs parmi les  $d + 1$  définissant le support. Il a donc la structure d'un hypercube de dimension  $d$ , et comprend comme vu ci-dessus une arête centrale.

Etant donné que les  $e_i$  satisfont l'égalité  $\sum_{i=1}^d e_i = 0$ , la notion d'arc central est totalement symétrique. Ainsi les fonctions de hauteur autour d'un rhomboèdre sont telles que étant donnés deux sommets  $v$  et  $v'$  tels que  $v' = v + e_i$ , deux cas sont possibles. Soit  $T$  un pavage :

- soit la différence de hauteur  $h_T(v') - h_T(v)$  vaut 1, et l'arête  $[v, v']$  est une arête du bord d'un rhomboèdre de  $T$
- soit  $h_T(v') - h_T(v)$  vaut  $-d$ , et  $[v, v']$  est l'arête centrale d'un rhomboèdre de  $T$ .

En effet, soit  $\mathcal{C}$  un cycle  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{d+1} = v_0)$  (voir figure 5.3) tel que, il existe une permutation  $\pi$  des  $n + 1$  premiers entiers positifs telle que pour tout  $i$  on ait  $v_{i+1} = v_i + e_{\pi(i)}$ . Dans la suite, on note  $c_i = e_{\pi(i)}$ .

Alors,  $\mathcal{C}$  étant un cycle, la somme des différences  $h_T(v_{i+1}) - h_T(v_i)$  de hauteurs sur tous les arcs  $c_i$  vaut 0. Comme  $\mathcal{C}$  comprend  $d + 1$  arcs, l'un d'entre eux est tel que la différence de hauteur entre ses extrémités est  $-d$  et tous les autres 1. Ainsi tout cycle de longueur  $d + 1$  et dont tous les arcs sont différents contient un unique arc de valeur  $-d$ . Considérant cet arc  $c$ , tous les cycles possibles remplissant ces conditions et comprenant  $c$  forment un hypercube de dimension  $d$  dont  $c$  est l'arc central (voir figure 5.2).

Ceci implique qu'une arête  $(v, v')$  telle que  $|h(v) - h(v')| = d$  définit un rhomboèdre de dimension  $d$ , dont elle est l'arête centrale. On a une bijec-

tion entre rhomboèdres et arêtes centrales.

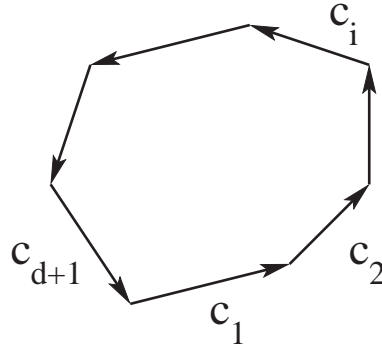


FIG. 5.3 – Le cycle  $\mathcal{C}$ , et la numérotation des arêtes.

Ayant étudié la structure d'un rhomboèdre particulier, nous pouvons caractériser les pavages en termes des propriétés des fonctions de hauteurs correspondantes.

**Proposition 5.2.1** Soit  $(T, T')$  une paire de pavages d'un support  $S$ ,  $h_T$  et  $h_{T'}$  les hauteurs associées. Si pour tout sommet  $h_T(v) = h_{T'}(v)$ , alors  $T = T'$ .

**Preuve :** Soit  $(v, v')$  une paire de sommets de  $S$  tels que  $v' = v + e_i$  pour un  $i$  fixé. On a deux cas possibles :

- si l'arête  $[v, v']$  ne coupe aucune tuile de  $T$ , alors  $h_T(v') = h_T(v) + 1$
- sinon,  $[v, v']$  est l'arête central d'une tuile de  $T$ , et  $h_T(v') = h_T(v) - d$  (en suivant le contour de la tuile)

Ainsi, le pavage  $T$  est formé de tuiles dont l'axe central est une arête  $[v, v']$  tel que  $|h_T(v') - h_T(v)| = d$ .

Le même argument s'applique à  $T'$ , donc  $T = T'$ .  $\square$

**Proposition 5.2.2** Soit  $f$  une fonction de l'ensemble des sommets de  $S$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(v_0) = 0$ , où  $v_0$  est l'origine du support  $S$
- pour toute paire  $(v, v')$  de sommets de  $S$  voisins tels que  $v' = v + e_i$  pour  $i$  fixé, on a soit  $f(v') = f(v) + 1$ , soit  $f(v') = f(v) - d$
- si de plus l'arête  $[v, v']$  est sur le bord de  $S$ , alors  $f(v') = f(v) + 1$

Alors il existe un pavage  $T$  tel que  $f(v) = h_T(v)$  pour tout sommet  $v$  de  $S$ .

**Preuve :** Soit  $T$  l'ensemble des tuiles dont les arêtes centrales sont celles dont les hauteurs des extrémités diffèrent de  $d$ . Alors nous avons les propriétés suivantes :

- $T$  couvre toutes les arêtes de  $S$ . En effet, d'après les propriétés des rhomboèdres, toute arête  $(v, v')$  de  $S$  appartient à un cycle  $\mathcal{C}$  contenant  $d + 1$  arêtes toutes différentes. Ainsi le cycle considéré contient une arête dont les hauteurs des extrémités diffèrent de  $d$ , et tout le cycle appartient à une tuile de  $T$  dont l'arc central est l'arête mise en évidence. .
- $T$  est tel que les intérieurs des tuiles sont disjoints. En effet, soit un cycle  $\mathcal{C}$  de  $d + 1$  arêtes contenant une arête dont les hauteurs des extrémités diffèrent de  $d$ . Par définition de la hauteur, la somme des différences de hauteurs sur  $\mathcal{C}$  vaut 0, et comme la différence sur une arête en sens direct ne peut valoir que 1 ou  $-d$ , il ne peut y avoir d'autre arête de valeur  $-d$  dans le cycle. Ainsi aucune arête du contour du rhomboèdre n'est l'arête centrale d'une autre tuile, et les intérieurs des tuiles sont disjoints.
- $f(v) = h_T(v)$  en tout sommet de  $S$ . La vérification est triviale. □

### 5.2.2 Le treillis des pavages

Les fonctions de hauteur, comme vu précédemment, induisent un ordre canonique sur l'ensemble des pavages d'un support  $S$  homéomorphe à un cercle. Étant donnée une paire  $(T, T')$  de pavages de  $S$ , on dit que  $T \leq T'$  si et seulement si  $h_T(v) \leq h_{T'}(v)$  en tout sommet  $v$  de  $S$ .

**Lemme 5.2.3** *Soit  $(T, T')$  une paire de pavages de  $S$ . Pour tout sommet  $v$  de  $S$ , la différence  $h_T(v) - h_{T'}(v)$  est un multiple de  $d + 1$ .*

**Preuve :** On rappelle que pour toute paire  $(v, v')$  de sommets de  $S$  voisins telle que l'arc  $(v, v')$  est direct, on a  $f(v') = f(v) + 1$  ou  $f(v') = f(v) - d$ . Alors, si le résultat est vrai pour  $v$ , il l'est pour  $v'$ , et réciproquement. Ceci induit le lemme, en remarquant que  $h_T(v_0) - h_{T'}(v_0) = 0$ , qui est multiple de  $d + 1$ . □

**Proposition 5.2.4** *Soient  $T, T'$  deux pavages de  $S$ . Les fonctions :*

- $\forall x f(x) = \min(h_T(x), h_{T'}(x))$
- $\forall x f'(x) = \max(h_T(x), h_{T'}(x))$

*sont également fonctions de hauteurs de deux pavages.*

**Preuve :** Nous faisons la preuve pour  $f$  en utilisant la proposition 5.2.2 (la preuve pour  $f'$  est similaire).

La première contrainte, ainsi que la dernière, sont évidemment satisfaites.

Soit une paire  $(v, v')$  de sommets de  $S$  voisins, telle que l'arc  $(v, v')$  soit direct. Supposons que  $h_T(v) < h_{T'}(v)$ . Alors d'après le lemme précédent,

nous avons  $h_T(v) \leq h_{T'}(v) - (d+1)$ . De plus,  $h_T(v') \leq h_T(v) + 1$  et  $h_{T'}(v') \geq h_{T'}(v) - d$ . Donc :

$$h_T(v') \leq h_T(v) + 1 \leq h_{T'}(v) - (d+1) + 1 \leq h_{T'}(v') + d - (d+1) + 1 = h_{T'}(v')$$

Ceci montre que, si  $h_T(v) < h_{T'}(v)$ , alors  $f(v') = h_T(v')$ . D'autre part  $f(v) = h_T(v)$ , donc  $f(v') - f(v) = h_T(v') - h_T(v)$ , ce qui garantit la seconde contrainte de la proposition 5.2.2.

Les cas  $h_T(v) > h_{T'}(v)$  et  $h_T(v) = h_{T'}(v)$  se traitent de façon similaire.  $\square$

**Corollaire 5.2.5** *L'ordre défini ci-dessus induit une structure de treillis distributif sur l'ensemble des pavages de  $S$ .*

**Preuve :** Conséquence directe de la proposition précédente.  $\square$

### 5.2.3 Treillis et flips

Soit  $T$  un pavage de  $S$ . Un maximum local (respectivement minimum local) de  $h_T$  est un sommet intérieur  $v$  de  $S$  tel que pour chaque voisin  $v'$  de  $v$   $h_T(v') < h_T(v)$  (respectivement  $h_T(v') > h_T(v)$ ).

**Proposition 5.2.6** *Un sommet intérieur  $v$  de  $S$  est un extremum local de  $h_T$  si et seulement si  $v$  est le centre d'un zonotope unitaire de taille  $d+1$  recouvert par  $d+1$  tuiles adjacentes 2 à 2.*

**Preuve :** Si  $v$  est le centre d'un zonotope unitaire de taille  $d+1$  recouvert par  $d+1$  tuiles adjacentes 2 à 2, alors une vérification facile montre que une hauteur de  $v$  est un extremum local de  $h_T$ .

Réciproquement, soit  $v$  un maximum local (la preuve est similaire pour un minimum local). Soit  $[v, v']$  une arête telle que  $v = v' + e_i$ . Alors on a nécessairement  $h_T(v') = h_T(v) - d$ . Cette arête est l'arête centrale d'une tuile  $t_i$ . Les  $d+1$  tuiles  $t_i$  sont deux à deux adjacentes. Ce qui donne le résultat.  $\square$

Ainsi, un flip est le remplacement de  $d+1$  tuiles (définies par leur arête centrale) par  $d+1$  autres tuiles telles que toutes les arêtes centrales ont pour extrémité un sommet  $v$  du pavage.

Etant donnés deux pavages  $T$  et  $T_v$  séparés par un flip autour d'un sommet  $v$ , tout chemin suivant les arêtes du pavages dans  $T$  peut être modifié pour donner un chemin de  $T_v$  ayant même propriété en changeant uniquement la dernière arête. On a ainsi  $|h_T(v) - h_{T_v}(v)| = d+1$ . Si  $h_{T_v}(v) = h_T(v) + d+1$ , alors le flip est *montant* (un minimum local est changé en maximum local), sinon le flip est *descendant* (un maximum local est changé en minimum local).

Ceci permet les applications suivantes.

### 5.2.4 Applications

Nous présentons ici deux applications essentielles des fonctions de hauteur.

#### Construction d'un pavage

Etant donné un support  $S$ , comment construire un pavage de  $S$ , où vérifier que  $S$  n'est pas pavable ? Si un tel pavage existe, on note  $T_{min}$  le pavage minimal.  $T_{min}$  n'a pas de maximum local, sinon il suffirait de faire un flip descendant en ce sommet pour obtenir un pavage plus petit que lui.

Ceci implique que chaque sommet  $v$  de  $S$  tel que  $h_{T_{min}}(v)$  est maximal est sur le contour de  $S$ . Cette propriété permet de construire  $T_{min}$  en temps  $O(a(S))$ , où  $a(S)$  est le nombre de cellules de  $S$ , par l'algorithme de Thurston [Thu90], que nous rappelons ici.

---

#### Algorithme 4: Algorithme de Thurston

---

**Entrée** : un support  $S$

**Sortie** : un pavage de  $S$  ou l'information que  $S$  n'est pas pavable

**début**

Calculer la hauteur en tous les sommets du contour de  $S$ ;

**répéter**

Soit  $v$  un sommet de hauteur maximale sur le contour;

Placer l'unique tuile dont  $v$  est une extrémité de l'arête centrale, l'autre extrémité n'étant pas sur le contour;

Mettre à jour le contour et la fonction de hauteur;

**jusqu'à**  $S$  est entièrement pavé, ou un sommet  $v$  de  $S$  a deux hauteurs différentes (et  $S$  n'est alors pas pavable) ;

**fin**

---

#### Distance de flips entre deux pavages

Soit  $(T, T')$  une paire de pavages de  $S$ . Peut-on transformer  $T$  en  $T'$  par une suite de flips, et dans ce cas quelle est la longueur d'une plus courte suite ? Ces questions correspondent à chercher une distance dans l'ensemble des pavages.

**Définition 15** Soit  $(T, T')$  une paire de pavages de  $S$ . La distance  $\Delta(T, T')$  entre  $T$  et  $T'$  est définie par :

$$\Delta(T, T') = \sum_{v \in S} |h_T(v) - h_{T'}(v)|$$

**Proposition 5.2.7** *Soit  $(T, T')$  une paire de pavages de  $S$ . Alors  $T \leq T'$  si et seulement si il existe une suite  $(T_0, T_1, \dots, T_p)$  de pavages tels que  $T = T_0, T_p = T'$  et pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i < p$   $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  par un flip montant.*

**Preuve :** Supposons  $T < T'$ . Soit  $v$  un sommet de  $S$  tel que  $h_T(v) < h_{T'}(v)$  (ainsi  $h_T(v) \leq h_{T'}(v) - (d + 1)$  d'après le lemme 5.2.3) et de hauteur minimale. Comme  $h_T(v) \neq h_{T'}(v)$ ,  $v$  est à l'intérieur de  $S$  (on sait que les sommets du contour ont une hauteur indépendante du pavage).

Soit  $v'$  un voisin de  $v$  tel que l'arc  $(v', v)$  soit direct.

Si  $h_T(v) = h_T(v') + 1$ , alors

$$\begin{aligned} h_T(v') &= h_T(v) - 1 \\ &\leq h_{T'}(v) - (d + 1) - 1 \\ &\leq h_{T'}(v') + 1 - (d + 1) - 1 \\ &= h_{T'}(v') - (d + 1) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

d'où  $h_T(v') < h_{T'}(v')$  Ceci contredit la minimalité de  $h_T(v)$ , donc l'hypothèse  $h_T(v) = h_T(v') + 1$  est absurde. Ainsi, la tuile dont l'axe central est  $(v, v')$  apparaît dans  $T$ .

Cet argument peut être utilisé pour tout sommet  $v''$  tel que l'arc  $(v'', v)$  est direct. On obtient au final que  $v$  est un minimum local de  $h_T$ . Par conséquent, un flip montant peut être effectué sur  $T$  autour de  $v$ . Soit  $T_1$  le pavage obtenu par ce flip. Notons que  $T_1 \leq T'$ .

De plus, pour  $w \neq v$ ,  $h_{T'}(w) - h_{T_1}(w) = h_{T'}(w) - h_T(w)$ , et  $h_{T'}(v) - h_{T_1}(v) = h_{T'}(v) - (h_T(v) + (d + 1))$ . Ceci implique  $\Delta(T_1, T') = \Delta(T, T') - (d + 1)$ .

Le processus peut être répété pour  $T_1$ , puis pour tous les pavages successifs jusqu'à ce que  $T'$  soit obtenu.  $\square$

Cette proposition peut être interprétée de la manière suivante. Nous avons deux ordres sur l'ensemble des pavages de  $S$ . Le premier est directement induit par les fonctions de hauteur, le second par les flips. Cette proposition établit l'égalité entre ces deux ordres.

Une conséquence de cette proposition est la formule donnée par le corollaire suivant. Elle a été démontrée dans [STJR95] pour le cas des pavages de dominos.

**Corollaire 5.2.8** *Soient  $(T, T')$  une paire de pavages de  $S$ , et  $n(T, T')$  le nombre minimum de flips permettant de passer de  $T$  à  $T'$ .*

*Alors  $n(T, T') = \Delta(T, T') / (d + 1)$ .*

**Preuve :** Soit  $(T = T_0, T_1, \dots, T_p = T')$  une suite de pavages telle que pour chaque entier  $i$  tel que  $0 \leq i < p$ ,  $T_{i+1}$  est obtenu à partir de  $T_i$  par un flip.



Alors

$$\Delta(T, T') \leq \sum_{i=0}^{p-1} \Delta(T_i, T_{i+1}) = (d+1)p$$

Ceci implique que  $n(T, T') \geq \Delta(T, T')/(d+1)$ .

D'autre part, pour chaque pavage  $T''$  tel que  $T'' \geq T$  et  $T'' \geq T'$ , nous avons  $n(T, T'') = \Delta(T, T'')/(d+1)$  et  $n(T'', T') = \Delta(T'', T')/(d+1)$ , d'après la proposition ci-dessus.

Soit  $T_{sup}$  le supremum de  $T$  et  $T'$  (c'est-à-dire le plus petit pavage supérieur à la fois à  $T$  et  $T'$ ). Notons d'abord que

$$\Delta(T, T') = \sum_{w \in S, h_{T'}(w) < h_T(w)} h_T(w) - h_{T'}(w) + \sum_{w \in S, h_{T'}(w) > h_T(w)} h_{T'}(w) - h_T(w)$$

On en déduit  $\Delta(T, T') = \Delta(T, T_{sup}) + \Delta(T_{sup}, T')$ , et donc

$$n(T, T') \leq n(T, T_{sup}) + n(T_{sup}, T') = (\Delta(T, T_{sup}) + \Delta(T_{sup}, T'))/(d+1)$$

A partir de ces inégalités, on obtient  $n(T, T') \leq \Delta(T, T')/(d+1)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Il existe d'autres applications importantes non détaillées ici :

- génération de l'ensemble des pavages d'un support donné : Un algorithme de génération exacte efficace de tous les pavages d'un domaine de la grille triangulaire par losanges (ou grille carrée par dominos) décrit par Desreux et Rémila dans [DR03]. Voir également [Des]. Il s'étend naturellement aux dimensions supérieures, en codimension 1.

- génération aléatoire uniforme de pavages : En dimension 2, des résultats très forts ont été obtenus pour la génération aléatoire uniforme de pavages par des losanges, et sur la statistique de tels pavages. Pour plus de précisions, voir [Pro98, CLP98, JPS95, Des01, MLS01].

La structure de treillis nous donne directement la connexité de l'espace des pavages, et donc un processus Markovien de tirage aléatoire de pavages, qui converge vers la distribution uniforme. De plus la méthode de "couplage à partir du passé" permet une génération aléatoire totalement (et non approximativement) uniforme.

Il est d'autre part bien connu que le problème de temps de convergence de tels processus est difficile dans le cas général. Pour le cas particulier des pavages de zonotopes, les principaux résultats actuels sont des résultats d'approximation, ou partiellement expérimentaux [Des01, WDMB98, Wil, BD].

## Chapitre 6

# Représentation en codimension 2

Comme précisé au chapitre 4, les pavages de zonotopes peuvent être codés par leurs mineurs. Précisément, un pavage est déterminé par l'ensemble de positions hautes ou basses de tous ses  $(d + 1)$ -mineurs (libres). Nous allons par conséquent décrire une représentation des pavages de zonotopes basée sur les structures des mineurs. Le théorème de reconstruction montre que toutes les contraintes entre  $(d + 2)$ -mineurs contiennent entièrement la caractérisation des mots codants. Ceci entraîne l'étude des  $(d + 2)$ -mineurs, que nous effectuons à présent. On se limitera dans ce chapitre au cas  $D = d + 2$ .

Pour simplifier, dans ce qui suit le type d'un flip sera parfois représenté par l'indice du vecteur absent du flip (par exemple  $\{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}\} = 1 \dots (d + 1) = \overline{d + 2}$ ).

Dans un premier temps, nous établissons l'égalité entre flips géométriques et un autre type de flip : le *flip ensembliste*. Ce résultat implique la possibilité d'étudier les contraintes sur les mineurs et d'appliquer les résultats aux flips géométriques.

### 6.1 Flip ensembliste

Nous définissons le *flip ensembliste* comme suit : soient  $T$  et  $T'$  deux pavages d'un zonotope tels que tous leurs  $(d + 1)$ -mineurs soient identiques, sauf un. On dit que  $T$  et  $T'$  diffèrent d'un flip ensembliste. Le flip ensembliste de  $T$  à  $T'$  est dit *montant* si le  $(d + 1)$ -mineur considéré est en position basse dans  $T$  et en position haute dans  $T'$ , et le flip est descendant dans l'autre cas.

**Proposition 6.1.1** Soient  $T$  et  $T'$  deux pavages d'un zonotope  $Z$ .  $T$  diffère de  $T'$

*d'un flip ensembliste montant si et seulement si  $T$  diffère de  $T'$  d'un flip géométrique montant.*

*La relation  $\leq_{\text{flip}}$  définit un ordre partiel.*

**Preuve :** Il est évident qu'un flip géométrique est un flip ensembliste de même orientation, parce qu'il échange localement les positions de  $d + 1$  tuiles. Etant donné qu'un seul  $(d + 1)$ -mineur contient toutes ces tuiles, leurs positions sont échangées dans ce mineur uniquement.

Pour la réciproque, on étudie l'incidence d'une suppression et d'un flip ensembliste sur une ligne de de Bruijn. Une suppression qui ne supprime pas toute la ligne de de Bruijn supprime une unique tuile de la ligne, et ne change par conséquent pas l'ordre des tuiles restantes de la ligne.

Ceci implique qu'un flip ensembliste change l'ordre sur une ligne de de Bruijn uniquement pour les paires de tuiles apparaissant dans le flip, puisque toute autre tuile apparaît dans un  $(d + 1)$ -mineur qui est inchangé. Donc, pour la consistance de l'ordre, ceci signifie que toutes les paires de tuiles qui apparaissent dans le flip sont adjacentes deux à deux. Ainsi le flip est effectivement géométrique.

La seconde partie de la proposition est une conséquence directe de ce premier résultat.  $\square$

Ce résultat exprime l'égalité entre l'ordre sur les flips et l'ordre sur les mineurs. Ceci permet d'aborder l'étude de la structure de l'espace des pavages par le biais de l'étude des structures sous-jacentes aux mineurs.

## 6.2 Diagrammes de représentation

Nous introduisons ici une nouvelle représentation en exprimant les contraintes liant les  $(d + 1)$ -mineurs d'un pavage contenus dans un même  $(d + 2)$ -mineur.

### 6.2.1 Les $(d + 2)$ -zonotopes de base

En dimension  $d$ , il existe deux types de base de  $(d + 2)$ -zonotopes de dimension  $d$  dont le pavage n'est pas unique : soit tous les vecteurs ont multiplicité 1 (on est alors en codimension 2), ou l'un des vecteurs a multiplicité 2 (cas de codimension 1). Etudions tout d'abord ces deux cas.

#### Les $(d + 2)$ -zonotopes de codimension 1

**Proposition 6.2.1** *L'espace des pavages d'un zonotope  $Z_i$  de codimension 1 avec le vecteur  $v_i$  de multiplicité 2 (et les  $d$  autres de multiplicité 1) comprend 3 pavages,*

et peut être structuré comme une chaîne de longueur 2.

**Preuve :** Dans tout pavage il existe une unique tuile  $t$  qui n'est pas dans  $S_{\{v_i,1\}} \cup S_{\{v_i,2\}}$ . Comme de plus  $T_{\{v_i,1\}}^- \subseteq T_{\{v_i,2\}}^-$ , on obtient 3 pavages :

- $t \in T_{\{v_i,1\}}^-$
- $t \in T_{\{v_i,2\}}^+$
- $t \in T_{\{v_i,2\}}^- \setminus T_{\{v_i,1\}}^-$ .

Les arêtes correspondant aux flips sont évidentes, il suffit de remarquer que les  $(d+1)$ -mineurs libres de  $Z_i$  sont de même type, ce qui donne la chaîne. Voir figure 6.1.  $\square$

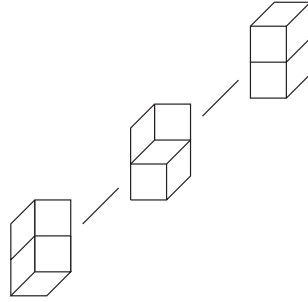


FIG. 6.1 – Pavages d'un zonotope de codimension 1 avec un vecteur dupliqué, et son diagramme

Informellement, on peut rapporter cet espace de pavages à l'empilement de deux hypercubes de dimension  $(d+1)$ . Ainsi la contrainte liant les deux mineurs considérés correspond à l'idée que l'on s'en fait : l'hypercube du haut ne peut être posé que si celui du bas est présent.

### Les $(d+2)$ -zonotopes unitaires

Nous étudions à présent le cas où tous les vecteurs définissant le  $(d+2)$ -zonotope diffèrent.

**Lemme 6.2.2** Soit  $T$  un pavage d'un  $(d+1)$ -zonotope unitaire  $Z$ , et  $v$  un vecteur n'apparaissant pas dans le type de  $Z$ . On définit un tournoi  $G_{(T,v)}$  sur les tuiles de  $T$  en posant que  $(t_1, t_2)$  est un arc de  $G_{(T,v)}$  si la copie du vecteur  $v$  qui traverse leur face commune passe de  $t_1$  vers  $t_2$ . Voir Figure 6.2.

Le tournoi  $G_{(T,v)}$  est un ordre total.

**Preuve :** Etant donné que toutes les paires de tuiles sont reliées, il suffit de montrer que  $G_{(T,v)}$  est sans cycle de longueur 3. Nous faisons cette preuve

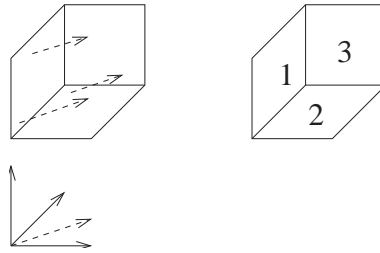


FIG. 6.2 – Un pavage de codimension 1, le vecteur supplémentaire (en pointillés), et la numérotation des tuiles induite par ce vecteur.

par réduction au cas  $d = 2$ , pour lequel ceci peut être aisément fait par une analyse exhaustive.

En dimension supérieure, notons que, comme  $D = d + 1$ , les types de 3 tuiles données  $t_1, t_2$  et  $t_3$  contiennent  $(d + 1) - 3 = d - 2$  vecteurs communs. Soit  $p$  la projection orthogonale sur l'espace de dimension 2 qui est orthogonal aux  $d - 2$  vecteurs communs. Les projections  $p(t_i)$  sont des parallélogrammes, et on a  $(t_i, t_j) \in G_{(T,v)}$  si et seulement si  $(p(t_i), p(t_j)) \in G_{H,p(v)}$ , où  $H$  est l'hexagone couvert par les parallélogrammes  $p(t_i)$  ( $H$  est effectivement un hexagone, sinon les tuiles ne peuvent être adjacentes 2 à 2). Ceci implique le lemme, parce que  $G_p(v)$  n'est pas un cycle.  $\square$

Un ordre total sur les tuiles étant établi, nous pouvons à présent montrer comment structurer l'ensemble des pavages en s'appuyant sur cet ordre.

**Proposition 6.2.3** *L'espace de pavages d'un  $(d+2)$ -zonotope unitaire est un cycle de longueur  $2(d+2)$ , et tout étiquette possible est attribuée à une paire d'arêtes opposées dans le cycle.*

**Preuve :** Soit  $T$  un pavage d'un zonotope unitaire  $Z = ((v_1, v_2, \dots, v_{d+2}), (1, 1, \dots, 1))$ . D'après le lemme précédent,  $T_{\{v_{d+2}, 1\}}^-$  est un segment initial de l'ordre induit par  $v_{d+2}$  sur les tuiles de  $D_{\{v_{d+2}, 1\}}(T)$ .

Réciproquement, étant donné un pavage  $T'$  dont le support est  $Z' = D_{\{v_{d+2}, 1\}}(T)$ , et un segment initial  $T'$  (suivant l'ordre induit par  $v_{d+2}$ ), on peut aisément construire un pavage de  $Z$  : les tuiles qui ne sont pas dans le segment initial sont translatées de  $v_{d+2}$ , et les tuiles de  $S_{\{v_{d+2}, 1\}}$  sont insérées dans l'espace ainsi créé. Il existe  $d + 2$  segments initiaux possibles pour un ensemble de  $d + 1$  éléments, donc, comme  $Z'$  peut être pavé de deux façons différentes, il existe  $2(d + 2)$  pavages pour  $Z$ .

Considérons maintenant un pavage de  $T$ , c'est-à-dire un pavage  $T'$  du zonotope  $Z'$  et  $I$  un de ses segments initiaux. Quels flips sont possibles à partir de  $T$ ? Tout d'abord, si le segment est propre (c'est-à-dire ni vide ni  $T'$  tout entier), alors il y a deux flips possibles qui correspondent à ajou-

ter ou retirer une tuile dans  $I$ . Il n'y a pas d'autre flip possible à cause des positions relatives de tuiles données par l'ordre des tuiles de  $T'$  (le flip agissant uniquement sur des tuiles de  $T'$  n'est pas possible à cause de la coupe par  $S_{\{v_{d+2},1\}}$ ). Un argument similaire s'applique dans l'autre cas : si  $I$  est vide, deux flips sont possibles : l'un correspond à ajouter la première tuile dans  $I$ , l'autre agit sur toutes les tuiles de  $T'$ . Si  $I = T'$ , deux flips sont possibles : l'un correspondant à retirer la dernière tuile de  $I$ , l'autre agissant sur les tuiles de  $T'$ . Ceci donne le résultat, en utilisant la symétrie des deux pavages de  $Z'$  pour obtenir les étiquettes sur les arêtes opposées (voir figure 6.3).  $\square$

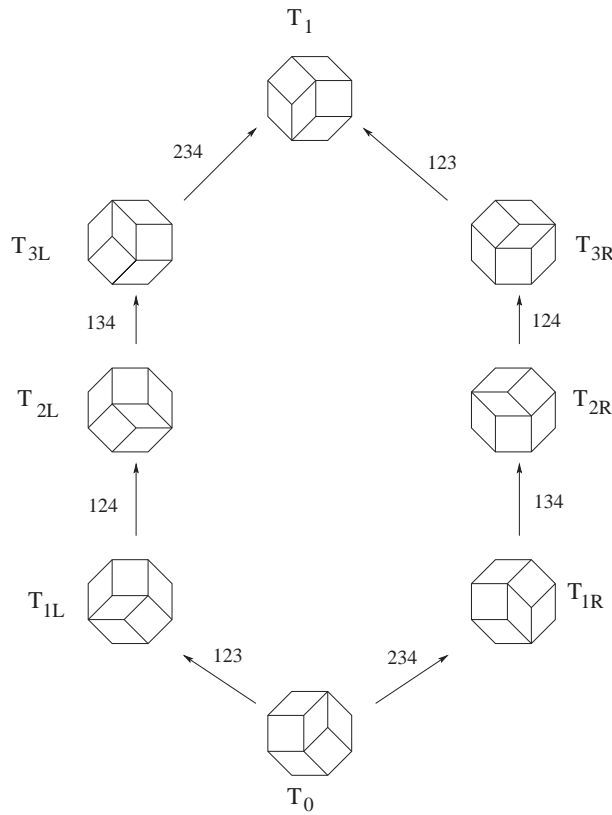


FIG. 6.3 – L'ordre associé à un octogone unitaire

### Convention sur l'ordre

On fixe un pavage de base  $T_0$  pour le  $(d+2)$ -pavage unitaire. Nous forçons alors la convention sur les positions hautes et basses des  $(d+1)$ -pavages, en choisissant comme positions basses des  $(d+1)$ -pavages les positions apparaissant dans les  $(d+1)$ -mineurs de  $T_0$ . Avec cette conven-

tion,  $T_0$  est le pavage le plus bas ;  $T_1$ , son opposé dans le cycle, est le pavage le plus haut. L'espace est formé de deux chaînes orientées de  $T_0$  vers  $T_1$ , qui ne se rencontrent qu'en leurs extrémités. Aux renumérotations de vecteurs près, on peut supposer que de  $T_0$  à  $T_1$  la suite des étiquettes successives dans une chaîne est  $(\overline{d+2}, \overline{d+1}, \dots, \overline{1})$ , et dans l'autre chaîne  $(\overline{1}, \dots, \overline{d+1}, \overline{d+2})$ .

On peut alors coder chaque pavage par sa position dans le cycle comme suit : le pavage à l'extrémité de la chaîne issue de  $T_0$  dont la suite d'étiquettes est  $(\overline{d+2}, \overline{d+1}, \dots, \overline{d+3-i})$  est notée  $T_{iL}$  (moins formellement c'est le  $i$ -ème pavage dans la chaîne de gauche), et le pavage à l'extrémité de la chaîne issue de  $T_1$  dont la suite d'étiquettes est  $(\overline{d+2}, \overline{d+1}, \dots, \overline{d+3-i})$  est noté  $T_{iR}$  (c'est le  $i$ -ème pavage dans la chaîne de droite).

### 6.2.2 Diagrammes de pavages

Nous pouvons à présent expliciter notre représentation d'un pavage donné  $T$ , qui est une composition des contraintes associées à chaque type de  $(d+2)$ -mineur.

#### Points

Dans cette représentation, chaque  $(d+1)$ -mineur est représenté par un *point*. Chaque point est défini par deux paramètres. Nous avons d'abord un *vecteur de coordonnées*, élément de  $\mathbb{Z}^{d+2}$ , qui indique la position du  $(d+1)$ -mineur dans la suite des mineurs : la  $i$ -ème coordonnée est  $j$  si la suppression suivant  $\{v_i, j\}$  n'a pas été faite pour obtenir le  $(d+1)$ -mineur correspondant ; la  $i$ -ème coordonnée est nulle si, pour tout entier  $1 \leq j \leq m_i$ , la suppression suivant  $\{v_i, j\}$  a été faite (il existe donc une unique composante nulle). Remarquons qu'un vecteur de coordonnées similaire peut être associé à chaque  $(d+2)$ -mineur dont le support est un zonotope unitaire, la différence est qu'il n'y a alors pas de composante nulle.

L'autre paramètre est une *couleur*, qui est blanc si le  $(d+1)$ -mineur est en position basse, et noir s'il est en position haute.

On peut mettre en parallèle la coloration avec le codage du chapitre 4. En effet un point noir correspond à un bit à 0 pour le codage, et un point blanc correspond à un bit à 1.

Il est clair que toutes les colorations ne sont pas possibles. En effet, certaines ne correspondent pas à des pavages, c'est exactement celles correspondant aux ensembles non compatibles par rapport au théorème de reconstruction. Ainsi, pour la reconstruction d'un pavage, on se concentrera

sur l'ensemble des contraintes de colorations qui sont données par la suite de  $(d + 2)$ -mineurs. Nous les explicitons maintenant.

### Lignes

Un ensemble de  $d + 2$  points correspond aux mineurs d'un  $(d + 2)$ -mineur dont le support est un zonotope unitaire si et seulement si toutes leurs coordonnées non nulles sont celles d'un vecteur de coordonnées du  $(d + 2)$ -mineur.

Ces points sont liés par une *ligne*, c'est-à-dire qu'ils forment une suite dans l'ordre donné par leur suite de types, en un chemin de  $T_0$  à  $T_1$ . D'après ce qui précède sur les pavages de  $(d + 2)$ -zonotopes unitaires, les points noirs forment un segment initial ou final (c'est-à-dire un préfixe ou un suffixe) de la ligne. Ceci est la *première contrainte*. Voir figure 6.4.

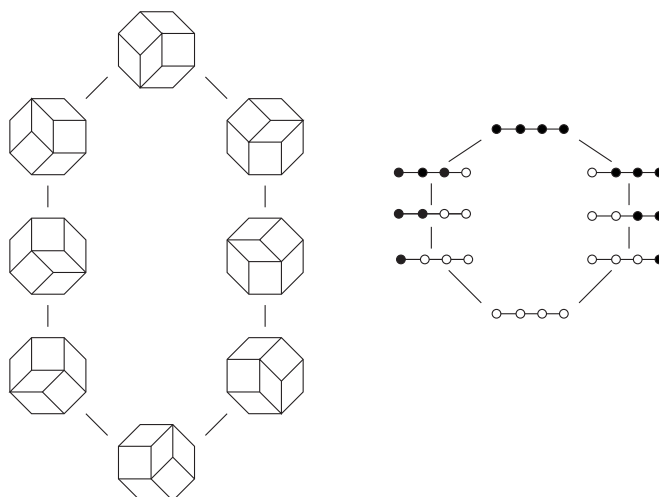


FIG. 6.4 – L'espace des pavages d'un  $(d + 2)$ -zonotope unitaire, et les colorations de la ligne correspondantes.

### Flèches

Deux points correspondent à une paire de mineurs d'un même  $(d + 2)$ -mineur dont le support est un  $(d + 2)$ -zonotope de codimension 1 si et seulement s'ils diffèrent d'une seule coordonnée.

D'après les résultats précédents sur ces  $(d + 2)$ -pavages, il y a exactement trois colorations possibles pour de telles paires de points, qui correspondent à des pavages d'un  $(d + 2)$ -zonotope.

La configuration interdite comprend les deux couleurs. Nous posons une



flèche de sorte que son origine soit blanche dans la configuration interdite (l'extrémité est alors noire). Ainsi les trois colorations autorisées sont les deux points noirs, les deux blancs, et l'origine noire avec l'extrémité blanche. Ceci est la *deuxième contrainte*, ou contrainte de flèche (voir figure 6.5).

La flèche est étiquetée par la coordonnée qui diffère entre les deux points.

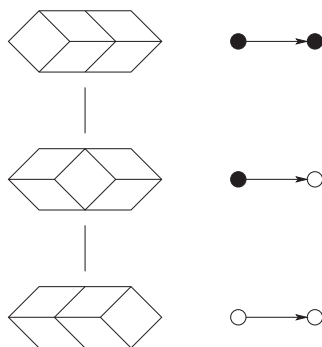


FIG. 6.5 – La contrainte de flèche.

Les flèches d'un diagramme donnent la *relation de couverture* : un point  $p$  est couvert par un point  $p'$  s'il existe une flèche dont  $p$  est l'origine et  $p'$  l'extrémité.

Informellement, on peut voir ces flèches comme des empilements de cubes. Un point noir correspond à un cube existant, ce qui implique que la coloration interdite soit l'origine blanche et l'extrémité noire.

Ainsi, les pavages de zonotopes sont présentés comme des *diagrammes* dont les lignes représentent des  $(d + 2)$ -zonotopes unitaires, et les flèches des  $(d + 2)$ -zonotopes de codimension 1. Voir figure 6.6. Notons que les flèches et les lignes ne dépendent que du support du pavage.

D'après le théorème de reconstruction, une coloration des points correspond à un pavage si et seulement si elle respecte les contraintes ci-dessus.

### 6.3 Propriétés des diagrammes

Remarquons tout d'abord que le diagramme le plus haut (c'est-à-dire dont tous les points sont noirs) et le plus bas (dont tous les points sont blancs) sont des pavages, puisqu'ils satisfont les contraintes de lignes et de flèches. Nous présentons deux propriétés fondamentales des diagrammes.

**Lemme 6.3.1 (propriété d'inversion)** Soient  $l = (p_1, p_2, \dots, p_{d+2})$  et  $l' = (p'_1,$

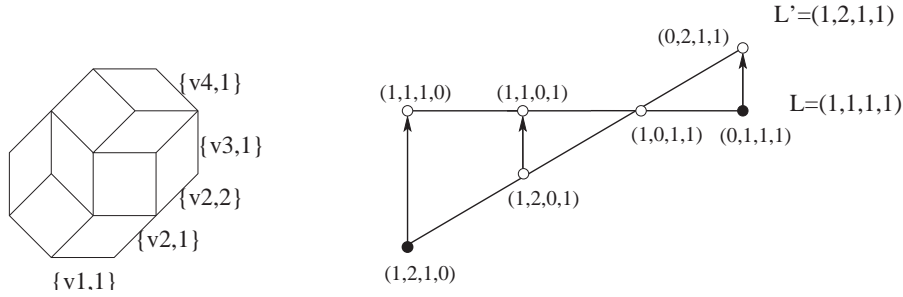


FIG. 6.6 – Un pavage et le diagramme associé. Notons l'orientation des flèches, conformément à la propriété d'inversion.

$p'_2, \dots, p'_{d+2}$ ) deux lignes distinctes telles qu'il existe un unique entier  $i$  tel que  $p_i = p'_i$ .

Supposons que  $p_1$  soit couvert par  $p'_1$ . Pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j < i$ ,  $p_j$  est couvert par  $p'_j$ , et pour tout entier  $j$  tel que  $i < j \leq d+2$ ,  $p'_j$  est couvert par  $p_j$ . Voir figure 6.6.

Il existe évidemment une propriété similaire si on suppose que  $p_{d+2}$  est couvert par  $p'_{d+2}$ .

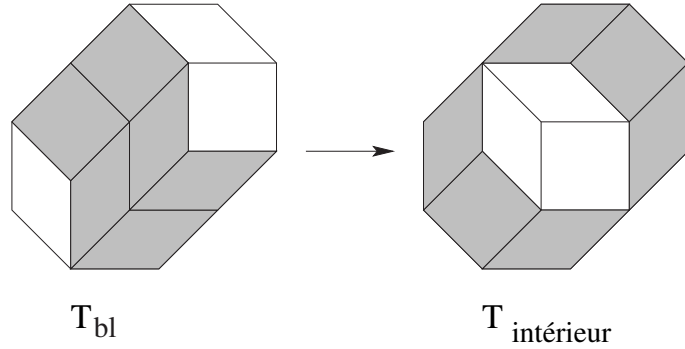
**Preuve :** Considérons le  $(d+2)$ -mineur dont les suites de mineurs correspondent aux points  $p_i$  et  $p'_i$ . Son support  $Z_0$  est de codimension 2, les multiplicités sont de 1 pour tout vecteur  $v_j$  avec  $j \neq i$  et de 2 pour un vecteur donné  $v_i$ .

Soit  $T_{bl}$  le pavage de  $Z_0$  dont tous les points sont blancs. Ce pavage a deux mineurs de codimension 2 obtenus en effectuant une suppression suivant  $v_i$ . Par définition, ces deux mineurs sont égaux à  $T_0$ . Ceci signifie qu'il n'y a pas de tuile entre les deux sections de de Bruijn basées sur  $v_i$  dans  $T_{bl}$ .

Par une série de flips, on peut déplacer les sections de de Bruijn de façon que chaque tuile (dont le type ne contient pas  $v_i$ ) du pavage résultant  $T_{interieur}$  soit entre les deux sections de de Bruijn basées sur  $v_i$ . Ceci est fait en procédant à deux séries de flips, l'une étiquetée par  $(\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{i-1})$  utilisée pour déplacer une section de de Bruijn, et l'autre étiquetée  $(\bar{d+2}, \bar{d+1}, \dots, \bar{i+1})$  pour déplacer l'autre section de de Bruijn.

L'ensemble de points noirs de la configuration résultante est soit  $\{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p'_{i+1}, \dots, p'_{d+2}\}$ , soit  $\{p'_1, p'_2, \dots, p'_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{d+2}\}$ . Le deuxième ensemble est impossible à cause de l'hypothèse que la flèche est dirigée de  $p_1$  vers  $p'_1$  (c'est-à-dire si  $p'_1$  est noir, alors  $p_1$  doit être noir).

Ainsi l'ensemble de points noirs est  $\{p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p'_{i+1}, \dots, p'_{d+2}\}$ , ce qui force le sens des flèches, et le résultat.  $\square$

FIG. 6.7 – Les pavages  $T_{bl}$  et  $T_{intérieur}$ 

La propriété d'inversion permet de définir le *graphe de lignes étiqueté*, dont les sommets sont les lignes du diagramme. Soient  $l = (p_1, p_2, \dots, p_{d+2})$  et  $l' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_{d+2})$  deux lignes distinctes. La paire  $(l, l')$  est une arête du graphe de lignes si et seulement si il existe un unique entier  $i$  tel que  $p_i = p'_i$ . Cette arête est étiquetée par  $i^-$  s'il existe une flèche du diagramme de  $p_1$  vers  $p'_1$ , ou une flèche de  $p'_{d+2}$  vers  $p_{d+2}$ . Sinon, l'arête est étiquetée  $i^+$ .

Le graphe de lignes ne dépend que du support du pavage, c'est-à-dire que deux pavages ayant même support ont le même graphe de lignes (notons informellement que le signe inclus dans les étiquettes indique le sens de rotation pour passer de  $l$  à  $l'$ ).

**Lemme 6.3.2 (propriété de consistance)** Soient  $(l_1, l'_1)$  et  $(l_2, l'_2)$  deux arêtes du graphe de lignes dont les étiquettes sont dans  $\{i^+, i^-\}$ . Les deux arêtes ont même étiquette si et seulement si  $(i_{l_1} - i_{l'_1})(i_{l_2} - i_{l'_2}) > 0$ .

**Preuve :** Considérons le zonotope  $Z_0$  de codimension 2, avec multiplicité 1 pour tous les vecteurs  $v_j$  avec  $j \neq i$ , et multiplicité 2 pour  $v_i$ . Comme pour le lemme précédent, toute paire  $(l_k, l'_k)$  induit un pavage de  $Z_0$ .

Soit  $T_{bl}$  le pavage de  $Z_0$  dont tous les points sont blancs. Toute section de de Bruijn de  $T_{bl}$  suivant  $v_i$  est numérotée par un élément de  $\{i_{l_k}, i_{l'_k}\}$ , suivant la paire  $(l_k, l'_k)$ . De plus l'indice le plus bas de chaque paire  $\{i_{l_k}, i_{l'_k}\}$  est donnée à la même section de de Bruijn (et l'indice le plus haut est donné à l'autre section).

A partir de ce pavage, comme pour le lemme précédent, on peut effectuer une série de flips pour obtenir le pavage  $T_{intérieur}$ . En observant les ensembles de points noirs pour toutes les paires de lignes, on obtient le résultat, en considérant les étiquettes des ensembles de flips dans chaque cas.

□

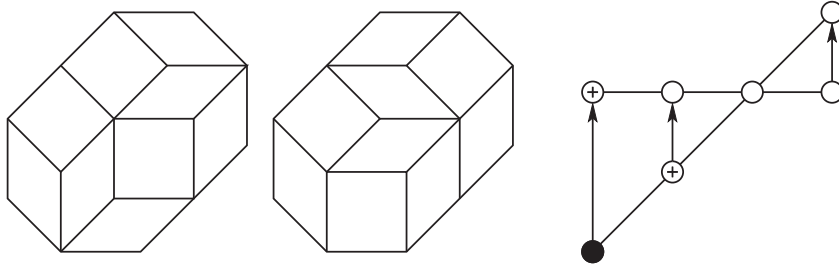


FIG. 6.8 – Le diagramme d'un zonotope, et la coloration.

## 6.4 Structure de l'ordre en codimension 2

Nous allons maintenant utiliser les propriétés des diagrammes de représentation pour obtenir des résultats structurels sur les espaces de pavages. Le théorème fondamental est le suivant :

**Théorème 6.4.1** Soient  $(T, T')$  une paire de pavages avec le même support, et  $B_T$  (respectivement  $B_{T'}$ ) l'ensemble des points noirs sur le diagramme représentant  $T$  (respectivement  $T'$ ). Alors  $T \leq T'$  si et seulement si  $B_T \subseteq B_{T'}$ .

On sait que pour  $D - d = 1$ , l'espace des pavages est un treillis distributif (voir [CR03, Fel97]). Comme corollaire du théorème précédent, nous obtenons une extension de ces résultats pour  $D - d = 2$ , c'est-à-dire la codimension 2.

Le sens direct du théorème est évident. Pour le sens indirect, on considère deux pavages  $T$  et  $T'$  tels que  $B_T \subseteq B_{T'}$ . La preuve nécessite deux lemmes que nous explicitons maintenant.

Par commodité, introduisons tout d'abord un peu de vocabulaire. Les points de  $B_T$  sont dits *totallement noirs*, ceux qui ne sont pas dans  $B_{T'}$  sont *totallement blancs*, et ceux restant sont dits *positifs*. Un point positif est *critique* s'il n'est couvert que par des points totallement blancs. Un point positif  $p$  est *enlevable* pour la paire  $(T, T')$  si  $B_{T'} \setminus \{p\}$  est encore l'ensemble de points noirs du diagramme d'un pavage. Un point enlevable est nécessairement critique. Il nous faut montrer que (si  $T \neq T'$ ) il existe un point enlevable. Si on considère un pavage, alors le plus bas est par défaut le pavage avec tous les points blancs. On parle alors de point *absolument enlevable*. Voir figure 6.8.

### 6.4.1 Réduction de faisceau

Le *faisceau*  $F_p$  généré par un point  $p$  est l'ensemble des lignes qui passent par  $p$ . Notons que la relation de couverture induit un ordre total sur les

Le point  $p$  n'est couvert par aucun point de  $F_p$ . Donc, si  $p$  est critique pour  $(T, T')$ , alors  $p$  est enlevable dans  $F_p$ , pour la paire  $(T_p, T'_p)$ .

**Preuve :** Considérons une ligne  $l'$  passant par  $p'$ . Il existe une ligne  $l$  passant par  $p$  et coupant  $l'$  (comme  $p'$  couvre  $p$  ils ne diffèrent que d'une coordonnée) en un point commun  $p''$ . D'après la propriété d'inversion, on voit (par une analyse exhaustive) que si  $p$  est enlevable sur  $l$  pour la paire  $(T_l, T'_l)$  de pavages induits par  $(T, T')$ , alors  $p'$  est enlevable sur  $l'$  pour la paire  $(T_{l'}, T'_{l'})$ . (Voir figure 6.9. On peut facilement vérifier que les autres configurations produisent le même résultat). Alors  $p'$  est enlevable dans  $F_{p'}$ .  $\square$

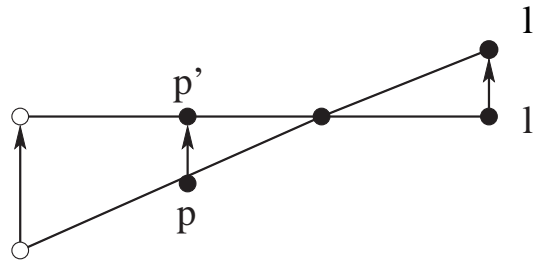


FIG. 6.9 – Réduction d'un faisceau

### 6.4.2 Graphe d'obstacles

L'idée de la preuve du théorème est de considérer deux pavages  $T$  et  $T'$ , avec  $T \leq T'$ , et de chercher une suite de flips permettant de passer de  $T'$  à  $T$ . Ceci correspond à "enlever" un certain nombre de points noirs dans le diagramme correspondant (c'est-à-dire colorer en blanc les points positifs), tout en conservant à chaque étape un pavage (c'est-à-dire un diagramme satisfaisant aux contraintes de lignes et de flèches). Le *graphe d'obstacle* modélise les transitions impossibles dans ce processus, c'est à dire qu'il caractérise comment, dans un faisceau, une ligne peut empêcher une recoloration d'un point qui est possible sur une autre ligne.

**Définition 16 (Graphe d'obstacles)** Le graphe d'obstacles est le graphe étiqueté orienté  $G$  tel que :

- Les sommets de  $G$  sont les pavages (ou les lignes de points correspondant) du  $(d+2)$ -zonotope unitaire (excepté  $T_0$ ).
- $(T, T')$  est un arc de  $G$  s'il existe un pavage  $T_{aux}$ , de taille  $d+3$  et codimension 2 tel que :
  - $T$  est un mineur de  $T_{aux}$  correspondant à une ligne  $l = (p_1, p_2, \dots, p_{d+2})$  incluse dans le diagramme de  $T_{aux}$
  - $T'$  est un mineur de  $T_{aux}$  correspondant à l'autre ligne  $l' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_{d+2})$  incluse dans le diagramme de  $T_{aux}$
  - l'unique point  $p_i$  tel que  $p_i = p'_i$  est (absolument) enlevable dans  $l$ , mais pas dans  $l'$
- si  $p_1 = p'_1$  alors l'arc  $(T, T')$  est étiqueté  $1^+$ . Si  $p_i = p'_i$  pour un entier  $i$  tel que  $2 \leq i \leq d+2$ , alors l'arc  $(T, T')$  est étiqueté  $i^-$  si  $p_1$  est couvert par  $p'_1$ , et étiqueté  $i^+$  sinon.

Voir figure 6.11 pour un exemple d'arc.

Moins formellement, le signe inclus dans l'étiquette indique le sens de rotation pour passer de  $l$  à  $l'$ .

Nous donnons ci-dessous les détails des arcs du graphe d'obstacles (voir figure 6.11). Les arcs sont les suivants :

- pour toute paire  $(k, j)$  telle que  $1 \leq k < j \leq d+2$ , la paire  $(T_{kL}, T_{jL})$  est une arc étiqueté  $k^-$  (excepté la paire  $(T_{1L}, T_{d+2L})$  qui n'est pas un arc)
- pour toute paire  $(k, j)$  telle que  $1 < k < d+2$  et  $d+3 < j+k$ , la paire  $(T_{kL}, T_{jR})$  est un arc étiqueté  $k^-$
- pour toute paire  $(k, j)$  telle que  $1 \leq k < j \leq d+2$ , la paire  $(T_{kR}, T_{jR})$  est un arc étiqueté  $k^+$  (excepté la paire  $(T_{1R}, T_{(d+2)R})$  qui n'est pas un arc)
- pour toute paire  $(k, j)$  telle que  $1 < k < d+2$  et  $d+3 < k+j$ , la paire  $(T_{kR}, T_{jL})$  est un arc étiqueté  $k^+$
- pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j < d+2$ , la paire  $(T_1, T_{jL})$  (nous rappelons que  $T_1 = T_{(d+2)L} = T_{(d+2)R}$ ) est un arc étiqueté  $1^+$ , et la paire  $(T_1, T_{jR})$  est un arc étiqueté  $(d+2)^-$

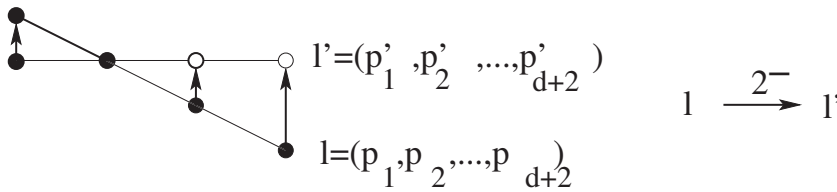


FIG. 6.10 – Exemple d'un arc d'un graphe d'obstacles

**Lemme 6.4.3** *Nous disons qu'un cycle orienté dans le graphe d'obstacles est équilibré si la suite des étiquettes de ses arcs est telle que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq d+2$ , l'étiquette  $i^+$  apparaît si et seulement si l'étiquette  $i^-$  apparaît. Alors le graphe d'obstacles n'a aucun cycle équilibré (non vide).*

**Preuve :** Supposons que l'on ait un tel cycle. Les sommets  $T_{1L}$  et  $T_{1R}$  ne peuvent apparaître dans ce cycle, puisqu'il n'ont aucun arc entrant. Alors nous les supprimons du graphe ainsi que tous les arcs qui leur sont adjacents, c'est-à-dire tous les arcs étiquetés  $1^-$  ou  $(d+2)^+$ . A cause de la condition d'équilibre sur le cycle, on retire également les arcs étiquetés  $1^+$  et  $(d+2)^-$ .

On recommence alors avec les sommets  $T_{2R}$  et  $T_{2L}$ . Comme les arcs étiquetés  $1^+$  et  $(d+2)^-$  ont été retirés,  $T_{2R}$  et  $T_{2L}$  n'ont plus d'arc entrant. Alors on peut les retirer, ainsi que toutes les arcs qui leur sont adjacents, c'est-à-dire tous les arcs étiquetés  $2^-$  et  $(d+1)^+$ . Pour maintenir la condition d'équilibre, on retire également les arcs étiquetés  $2^+$  et  $(d+1)^-$ .

En continuant le processus, on voit que tout le graphe va être supprimé. Il n'existe donc aucun cycle équilibré.  $\square$

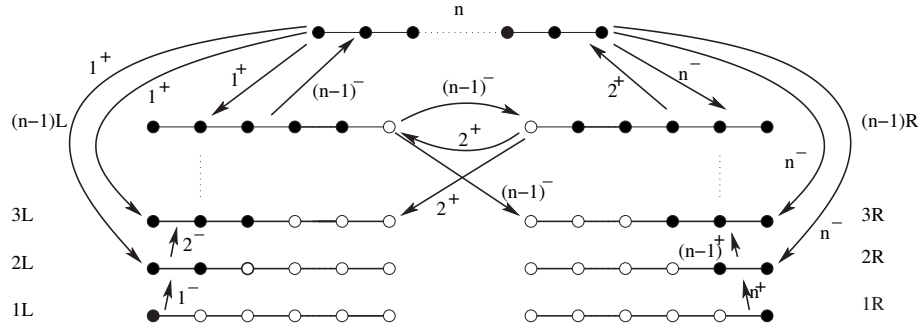


FIG. 6.11 – Le graphe d'obstacles dans le cas général

### 6.4.3 Fin de la preuve

Nous avons maintenant tous les outils pour finir la preuve du théorème 6.4.1.

**Preuve (du théorème 6.4.1) :** Comme dit précédemment, le sens direct est évident. Pour le sens indirect, d'après la réduction de faisceau, il suffit de trouver un point  $p$  enlevable dans  $F_p$  pour la paire  $(T_p, T'_p)$ .

Pour toute ligne  $l$ , nous disons qu'un point  $p$  est *enlevable dans  $l$*  si  $p$  est enlevable pour la paire  $(T_l, T'_l)$  de pavages du  $(d+2)$ -zonotope unitaire induit par la paire  $(T, T')$  à partir des colorations de  $l$ .

Si  $T \neq T'$ , il existe une ligne  $l_0$  contenant un point positif  $p_0$ , qui peut être supposé enlevable dans  $l_0$ . Si  $p_0$  est enlevable dans  $F_{p_0}$  pour  $(T_{p_0}, T'_{p_0})$ , alors le résultat est atteint.

Sinon, il existe une ligne  $l_1$  qui passe par  $p_0$ , telle que  $p_0$  ne peut être enlevé dans  $l_1$ . Il existe un autre point  $p_1$  qui est enlevable dans  $l_1$  pour  $(T_{l_1}, T'_{l_1})$ . Si  $p_1$  est enlevable dans  $F_{p_1}$  pour la paire  $(T_{p_1}, T'_{p_1})$ , alors c'est fini. Sinon on peut répéter le processus.

Supposons qu'il n'existe aucun point  $p$  enlevable dans  $F_p$  pour la paire  $(T_p, T'_p)$ . Avec cette hypothèse, le processus peut être répété indéfiniment pour construire une suite  $(l_i)_{i \geq 0}$  de lignes. Alors il existe une sous-suite finie  $(l_i)_{i_1 \leq i \leq i_2}$  qui est un cycle, c'est-à-dire  $l_{i_1} = l_{i_2}$ .

Ce cycle est un cycle  $C_{\text{ligne}}$  du graphe de lignes. L'idée principale est la suivante : à partir du cycle  $C_{\text{ligne}}$ , on peut obtenir canoniquement un cycle  $C_{\text{obstacle}}$  du graphe d'obstacles, à partir de l'application qui associe, à chaque ligne  $l$  du diagramme, la coloration donnée par le pavage  $T'_l$  du  $(d+2)$ -zonotope unitaire. L'étiquetage des arcs est préservé : si  $(l, l')$  est un arc de  $C_{\text{ligne}}$ , alors l'arc  $(T'_l, T'_{l'})$  obtenu par l'application a même étiquette que  $(l, l')$ .

D'après l'étude du graphe d'obstacles, le cycle  $C_{\text{obstacle}}$  n'est pas équilibré. On peut supposer sans perte de généralité que l'étiquette  $j^+$  apparaît dans le cycle, mais pas l'étiquette  $j^-$ . Ceci signifie qu'en suivant le cycle  $C_{\text{ligne}}$ , la  $j$ -ème coordonnée change toujours dans la même direction. Ceci ne peut se produire. Ainsi le processus doit finir sur une ligne  $l_i$  et un point  $p_i$  qui peut être enlevé.  $\square$

Ceci implique que dans toute configuration valide il existe un point noir enlevable (sinon on aurait un cycle équilibré dans le graphe d'obstacle).

#### 6.4.4 Conséquences

D'après le théorème 6.4.1, nous obtenons une structure d'ordre gradué pour l'espace des pavages. L'élément maximal est le pavage dont tous les points sont noirs, l'élément minimal étant celui dont tous les points sont blancs. Le rang d'un pavage est le nombre de points noirs de son diagramme. La hauteur de l'ordre est égale à la somme :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} \leq d+2} m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_{d+1}}.$$

La hauteur ci-dessus est également le diamètre de l'espace de pavages. Nous obtenons par là même la connexité de l'espace des pavages. En effet, par le processus décrit, tout pavage peut être connecté au pavage minimal (dont tous les points sont blancs) par une suite de recolorations de sommets



qui satisfait aux conditions flèches et lignes. Ceci correspond, nous l'avons vu, à une suite de flips descendants. Il est clair que le résultat est le même si on considère des flips montants.

Notons que dans le cas général l'ordre donné n'est pas un treillis. La figure 6.12 en donne un contre-exemple. Pour plus de clarté, la figure 6.14 donne l'ensemble des pavages du support considéré, et situe les deux pavages  $T$  et  $T'$ .

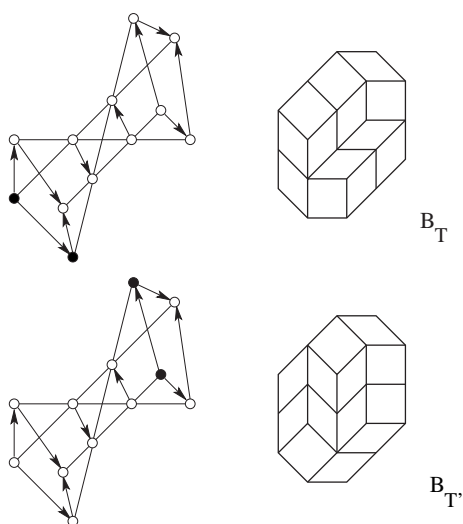


FIG. 6.12 – Les deux pavages  $T$  et  $T'$

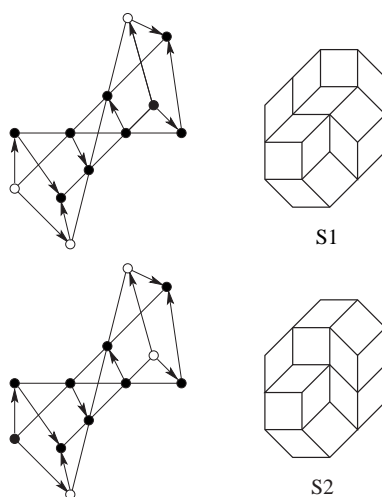


FIG. 6.13 – Les deux suprema et leurs diagrammes

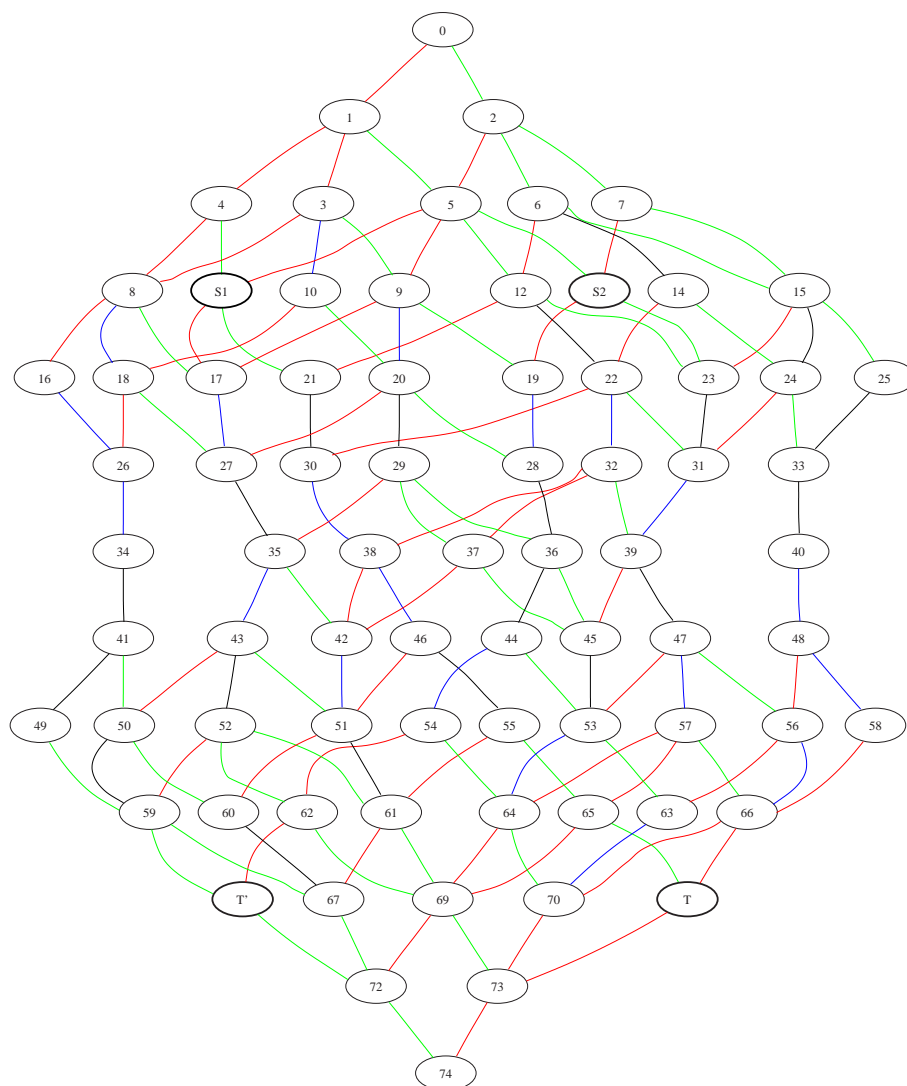


FIG. 6.14 – L'espace de pavages associé à l'exemple de la figure 6.12, et les quatre pavages remarquables.

## 6.5 Représentation en codimension 1

On peut remarquer que le diagramme de représentation décrit ci-dessus pour les cas de codimension 2 s'adapte naturellement à la codimension 1.

En codimension 1, les contraintes de lignes n'existent pas, seules les contraintes de type flèche persistent, et sont basées sur les duplications des vecteurs définissant le support.

On peut aisément orienter les mineurs (c'est-à-dire choisir les positions hautes et basses) de façon à obtenir un diagramme sans cycle. On peut vérifier que l'ensemble des colorations compatibles du diagramme obtenu forme un treillis distributif.

Informellement, on retrouve la représentation par empilement d'hypercubes. Chaque point correspond à un hypercube de l'empilement, et les contraintes de type flèche correspondent aux lois "classiques" de l'empilement (voir figure 6.15).

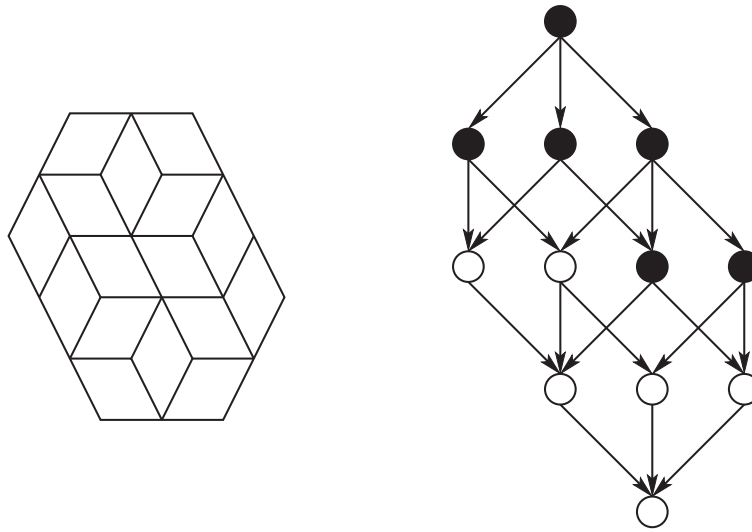


FIG. 6.15 – Un pavage de codimension 1 et son diagramme associé.

## Chapitre 7

# Conclusion et perspectives

Nous avons dans cette thèse abordé les pavages par un côté purement combinatoire, et proposé deux codages permettant de mettre en lumière certaines de leurs propriétés. Le premier codage présenté a l'avantage de montrer certaines caractéristiques des pavages de zonotopes, et nous a permis d'étudier certaines propriétés en parallèle avec leur traduction sur le graphe. Ces graphes semblent très fortement structurés, mais de nombreuses particularités liées aux pavages sous-jacents sont encore incomprises. En particulier, un critère de caractérisation plus simple que l'algorithme de reconstruction permettrait de retrouver les résultats de dénombrements connus, et de les étendre.

Les graphes paraissent un outil assez naturel de représentation des pavages de zonotopes. Ils permettent notamment d'aborder les cas comme ceux étudiés ici, où le pavage ne repose pas sur une grille, et sur lesquels les résultats de Thurston ne peuvent s'appliquer.

Le second outil de représentation que nous avons exhibé a l'avantage de permettre une approche de la structure de l'espace des pavages. L'application à la codimension 2 est naturelle et impliquée directement par le théorème de reconstruction. Cependant, s'il est maintenant clair que les interactions entre  $(d + 2)$ -mineurs définissent le pavage, il est tout aussi évident que les contraintes (comme les contraintes de lignes) se compliquent au fur et à mesure de l'accroissement de la codimension. C'est pourquoi dès la codimension 3 il ne nous a pas encore été possible de construire les diagrammes de représentation.

L'extension naturelle des travaux présentés ici serait tout d'abord d'étudier plus complètement la structure du graphe d'adjacence, afin d'en dégager les propriétés menant par exemple à une caractérisation de la classe de graphe mise en jeu. En effet, l'approche par graphes paraît être une bonne base pour comprendre plus complètement la structure des pavages. En particulier, si les lignes de de Bruijn sont un outil fondamental, la façon dont

elles modèlent le graphe d'adjacence est encore inconnue.

Pour l'étude des cas de dimensions supérieures, il serait intéressant de comprendre quels sont les différents types de  $(d + 2)$ -pavages et comment on peut structurer leurs espaces de pavages afin de comprendre les contraintes qu'ils entraînent au niveau des diagrammes. On pourrait ainsi structurer les espaces de pavages en toute dimension pour des codimension supérieures, ce qui permettrait d'éclairer les cas difficiles. En particulier, le problème de la connexité par flips est une question ouverte pour le cas général dès la dimension 3.

Une application du graphe d'obstacle est de considérer le cas plus général de deux pavages quelconques. Ceci entraîne une modification du graphe d'obstacle, en considérant un quatrième type de sommets. Des résultats tels que la distance de flips entre deux pavages pourraient découler de l'étude d'un tel graphe.

Ce travail nous aura donc permis, au-delà des résultats proprement dits, de dégager deux axes d'études des pavages, sans grille sous-jacente ou de grande dimension, qui pourront peut-être, nous l'espérons, se révéler fructueux.

# Bibliographie

- [AD95] C. Allauzen and B. Durand. Pavages du plan : indecidabilite et periodicite. Technical report, ENS Lyon, 1995. RR1995-28.
- [Bai99] G.D. Bailey. Coherence and enumeration of tilings of 3-zonotopes. *Discrete and Computational Geometry*, 22 :119–147, 1999.
- [BD] K. Brown and P. Diaconis. Random walks and hyperplane arrangements. *Ann. Probability*, 26.
- [BdO00] J. Bokowski and A. Guedes de Oliveira. On the generation of oriented matroids. *Discrete and Computational Geometry*, 24(2-3) :197–208, 2000.
- [Ber66] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66, 1966.
- [Ber99] K. Bertet. *Sur quelques aspects algorithmiques et structurels des treillis*. PhD thesis, Université Paris VII - Denis Diderot, 1999.
- [BF02] D. Beauquier and J.C. Fournier. Groups and tilings. *Theoretical Computer Science*, 281 :81–97, 2002.
- [BL03] O. Bodini and M. Latapy. Generalized tilings with height functions. *Morfismos*, 7(1) :47–68, 2003.
- [BS99] A. Bjorner and R.P. Stanley. A combinatorial miscellany, 1999. to be published by Cambridge University Press.
- [BV00] V. Berthe and L. Vuillon. Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of sturmian sequences. *Discrete Mathematics*, 223, 2000.
- [BVS<sup>+</sup>99] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G.M. Ziegler. *Oriented Matroids*, volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics*. Cambridge University Press, 1999. Second Edition.
- [CF93] R. Cordovil and K. Fukuda. Oriented matroids and combinatorial manifolds. *European Journal of Combinatorics*, 14 :9–15, 1993.
- [CL90] J.H. Conway and J.C. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *Journal of Combinatorial Theory*, A(53) :183–208, 1990.

- [CLM<sup>+</sup>04] F. Chavanon, M. Latapy, M. Morvan, E. Rémila, and L. Vuillon. Graph encoding of 2d-gon tilings, 2004. to appear in Theoretical Computer Science.
- [CLP98] H. Cohn, M. Larsen, and J. Propp. The shape of a typical boxed plane partition. *New York J. Math.*, 4 :137–165, 1998.
- [CR03] F. Chavanon and E. Rémila. Contractions of octagonal tilings with rhombic tiles. Technical report, ENS Lyon, 2003. RR2003-44.
- [CR04] F. Chavanon and E. Rémila. Rhombus tilings : decomposition and space structure. In *Proceedings of LACGA'04 (Latin-American Conference on Combinatorics, Graphs and Applications)*, 2004. to appear in Electronic Notes on Discrete Mathematics.
- [dB81] N.G. de Bruijn. Dualization of multigrids. *J. Phys. France*, C(47) :3–9, 1981.
- [Des] S. Desreux. An algorithm to generate exactly once every tiling with lozenges of a domain. to appear in Theoretical Computer Science.
- [Des97] N. Destainville. *Entropie configurationnelle des pavages aléatoires et des membranes dirigées*. PhD thesis, University Paris VI, 1997.
- [Des01] N. Destainville. Mixing times of plane random rhombus tilings. In *Proceedings of the Conference DM-CCG : Discrete Models : Combinatorics, Computation, and Geometry*, pages 1–22, 2001.
- [Des02] N. Destainville. Flip dynamics in octagonal rhombus tiling sets. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :30601, 2002.
- [DP90] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 1990. Second edition 2002.
- [DR03] S. Desreux and E. Rémila. Optimal exhaustive generation of domino tilings of a polygon. Technical report, ENS Lyon, 2003. ArXiv DS/0301188.
- [Eln97] S. Elnitsky. Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in Coxeter groups. *Journal of Combinatorial Theory*, 77 :193–221, 1997.
- [Els84] V. Elser. Solution of the dimer problem on a hexagonal lattice with boundary. *J.Phys.A : Math. Gen.*, 17 :1509–1513, 1984.
- [Fel97] S. Felsner. On the number of arrangements of pseudolines. *Discrete and Computational Geometry*, 18 :257–267, 1997.
- [FF02] L. Finschi and K. Fukuda. Generation of oriented matroids. *Discrete and Computational Geometry*, 27 :117–136, 2002.
- [FW01] S. Felsner and H. Weil. Sweeps, arrangements and signotopes. *Discrete Applied Mathematics*, 109 :67–94, 2001.

- [JPS95] W. Jockusch, J. Propp, and P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem, 1995.
- [Ken93] R. Kenyon. Tiling a polygon with parallelograms. *Algorithmica*, 9 :382–397, 1993.
- [Ken98] R. Kenyon. The planar dimer model with boundary : a survey, 1998. preprint.
- [Kup94] G. Kuperberg. Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method. *Journal of Combinatorial Theory*, A(68) :115–151, 1994.
- [Kup98] G. Kuperberg. An exploration of the permanent-determinant method. *Electronic Journal of Combinatorics*, 5, 1998. R46.
- [Lat00] M. Latapy. Generalized integer partitions, tilings of zonotopes and lattices. In A.A. Mikhalev D. Krob and E.V. Mikhalev, editors, *Proceedings of the 12-th international conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'00)*, pages 256–267. Springer, June 2000. Preprint available at <http://www.liafa.jussieu.fr/~latapy/>.
- [Lat01] M. Latapy. *Modèles dynamiques discrets et structures ordonnées*. PhD thesis, Université Denis Diderot - Paris VII, 2001.
- [LMN01] J. Linde, C. Moore, and M.G. Nordahl. An n-dimensional generalization of the rhombus tiling. In *Proceedings of DM-CCG (Discrete Models : Combinatorics, Computation, and Geometry)*, pages 23–42, 2001.
- [LP86] L. Lovasz and M.D. Plummer. *Matching Theory*, chapter Determinants and Matchings. AkadImiai KiadU - North Holland, Budapest, 1986.
- [Mac16] P.A. MacMahon. *Combinatory Analysis*, volume I, II. Cambridge University Press, London, 1915, 1916. reprint by Chelsea, New York, 1960.
- [Mar00] M. Margenstern. Frontier between decidability and undecidability : a survey. *Theoretical Computer Science*, 231, 2000.
- [MLS01] D. Randall M. Luby and A. Sinclair. Markov chain algorithms for planar lattice structures. *SIAM J. Comput.*, 31, 2001.
- [Pro98] J. Propp. Generating random elements of finite distributive lattices. *Electronic Journal of Combinatorics*, 4, 1998.
- [Pro99] J. Propp. Enumeration of matchings : Problems and progress. *New Perspectives in Algebraic Combinatorics*, L. Billera, A. Bjorner, C. Greene, R. Simion, and R. P. Stanley, eds., Mathematical Sciences Research Institute Publications, 38 :255–291, 1999.



- [Rém03] E. Rémila. The lattice structure of the set of domino tilings of a polygon. *Theoretical Computer Science*, 322 :409–422, 2003.
- [RGZ94] J. Richter-Gebert and G. Ziegler. Zonotopal tilings and the Bohne-Dress theorem. *Contemporary Mathematics*, 178 :211–232, 1994.
- [Sen95] M. Senechal. *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, 1995.
- [STJR95] N.C. Saldanha, C. Tomei, M.A. Casarin Jr., and D. Romualdo. Spaces of domino tilings. *Discrete and Computational Geometry*, 14 :207–233, 1995.
- [Thu90] W.P. Thurston. Conway’s tiling groups. *American mathematical monthly*, pages 757–773, oct. oct. 1990.
- [WDMB98] M. Widom, N. Destainville, R. Mosseri, and F. Bailly. Two-dimensional random tilings of large codimension. In *Proceedings of the ICQ6 Conference, Tokyo, Japan, 1998*. invited paper.
- [Wil] D.B. Wilson. Mixing times of lozenge tiling and card shuffling markov chains. *The Annals of Applied Probability*.
- [Zie92] G. Ziegler. Higher bruhat orders and cyclic hyperplane arrangements. *Topology*, 32 :259–279, 1992.
- [Zie95] G. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.